

УДК 519.6

А.П. МОТАЙЛО

Херсонська державна морська академія

АНАЛІТИЧНО-ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИЙ СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ МОДУЛЯ ЮНГА

Однією з важливих задач технології матеріалів є визначення фізико-механічних властивостей матеріалів при їх виробництві. Модуль Юнга як характеристика міцності матеріалу може бути знайдений експериментально у лабораторних умовах для стандартних зразків. У випадках, коли неможливо провести стандартні випробування, актуальною є задача пошуку нових способів визначення модуля поздовжньої пружності матеріалів. У даній роботі запропоновано спосіб визначення модуля Юнга, який може бути застосований на зразках матеріалів нестандартної форми та розмірів.

Мета роботи - розробка способу визначення модуля поздовжньої пружності матеріалу на основі порівняльного аналізу результатів математичного моделювання процесу, що відбувається у матеріалі під дією навантаження, та обчисленого експериментально модуля Юнга.

Запропоновано метод, при якому вимірюються лінійні переміщення, що виникають при навантаженні зразка матеріалу на малій площадці за допомогою індентора та порівнюються з локальними деформаціями, які отримані аналітично для моделі зразка методом скінченних елементів. Отримано формулу залежності модуля Юнга від переміщень, розрахованих аналітично та експериментально. Точність визначення модуля Юнга аналітично-експериментальним способом порівнюється з точністю розв'язання аналогічної задачі за допомогою стандартного випробування експериментального зразка призматичної форми на триточковий згин. За критерії валідності випробувань прийнято величину відносної похибки відхилень непрямих вимірювань модулів поздовжньої пружності, які були отримані як результати двох видів незалежних експериментів для зразків матеріалів.

Розроблений спосіб визначення модуля Юнга перевірено на зразках композиційних матеріалів. Досліджено вплив вибору скінченно-елементної решітки на точність обчислення модуля поздовжньої пружності випробуваних зразків. Точність проведених експериментів задовольняє інженерним вимогам, що дозволяє рекомендувати запропонований спосіб для використання на практиці при вирішенні задач оптимізації технології матеріалів. Застосування даного способу вирішує додаткову задачу створення програмно-методичного забезпечення з визначення механічних характеристик матеріалів. Перспективи подальших досліджень полягають в створенні способів визначення інших механічних констант, оптимізації відповідного програмного забезпечення, а також застосування даного способу при розв'язанні задачі з визначення об'ємного модуля Юнга анізотропних композиційних матеріалів, що використовують для створення функціональних покриттів у суднобудуванні.

Ключові слова: композиційні матеріали, модуль Юнга, індентор, метод скінченних елементів.

А.П. МОТАЙЛО

Херсонская государственная морская академия

АНАЛИТИЧЕСКИ-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДУЛЯ ЮНГА

Одной из важнейших задач технологи материалов является определение физико-механических свойств материалов при их производстве. Модуль Юнга как характеристика прочности материала может быть найден экспериментально в лабораторных условиях для стандартных образцов. В случаях, когда стандартные испытания провести невозможно, актуальной является задача поиска новых способов определения модуля продольной упругости материалов. В данной работе предлагается способ определения модуля Юнга, который может применяться на образцах нестандартной формы и размеров.

Цель работы – разработка способа определения модуля продольной упругости материала на основании сравнительного анализа результатов математического моделирования процесса, происходящего в материале под действием нагрузки, и вычисленного экспериментально модуля Юнга.

Предложен метод, при котором измеряются линейные перемещения, возникающие при нагружении образца материала на площадке малых размеров с помощью индентора и сравниваются с локальными деформациями, найденными аналитически для модели образца методом конечных элементов. Получена формула зависимости модуля Юнга от перемещений, рассчитанных аналитически и экспериментально. Точность определения модуля Юнга предложенным способом сравнивается с точностью решения аналогичной задачи с помощью стандартного испытания экспериментального

образца призматической формы на трехточечный изгиб. В качестве критерия валидности испытаний принята величина относительной погрешности отклонений косвенных измерений модулей продольной упругости, которые были получены в результате проведения двух независимых экспериментов для образцов материалов.

Разработанный способ определения модуля Юнга проверен на образцах композиционных материалов. Исследовано влияние выбора конечно-элементной решетки на точность вычисления модуля продольной упругости испытываемых образцов. Точность проведенных экспериментов удовлетворяет инженерным требованиям, что позволяет рекомендовать предложенный способ к использованию на практике при решении задач оптимизации технологии материалов. Использование данного способа решает дополнительную задачу создания программно-методического обеспечения для определения механических характеристик материалов. Перспективы дальнейших исследований состоят в создании способов определения других механических констант, оптимизации программного обеспечения, а также применения данного способа при решении задачи определения объемного модуля Юнга анизотропных композиционных материалов, используемых для создания функциональных покрытий в судостроении.

Ключевые слова: композиционные материалы, модуль Юнга, индентор, метод конечных элементов.

A.P. MOTAİLO

Kherson State Maritime Academy

ANALITICAL-EXPERIMENTAL METHOD FOR DETERMINING THE YOUNG'S MODULUS

One of the most important tasks of materials technologists is to determine the physical and mechanical properties of materials during their production. Young's modulus as a characteristic of the strength of a material can be found experimentally in laboratory conditions for standard samples. In cases where standard testing is not possible, the challenge is to find new ways to determine the modulus of longitudinal elasticity of materials. In this paper, we developed a method for determining the Young's modulus, which can be applied to samples of irregular shape and size.

The aim of the work is to develop a method for determining the modulus of the longitudinal elasticity of a material based on a comparative analysis of the results of mathematical modeling of the process occurring in the material under the action of a load, and the calculated experimentally Young's modulus.

A method is proposed in which linear displacements occurring when a sample of a material is loaded on a small area using an indenter are measured and compared with local deformations found analytically for a model of the sample by the finite element method. A formula is obtained for the dependence of the Young modulus on the displacements calculated analytically and experimentally. The accuracy of determining the Young's modulus by the proposed method is compared with the accuracy of solving a similar problem using a standard test of an experimental sample of a prismatic shape for three point bending. As a criterion for the validity of the tests, the value of the relative error of deviations of indirect measurements of the moduli of longitudinal elasticity, which were obtained as a result of two independent experiments for samples of materials, was adopted.

The developed method for determining the Young's modulus is tested on samples of composite materials. The influence of the choice of the finite element lattice on the accuracy of calculating the modulus of the longitudinal elasticity of the test specimens was investigated. The accuracy of the experiments performed meets the engineering requirements, which makes it possible to recommend the proposed method for use in practice in solving problems of optimizing the technology of materials. Using this method solves the additional problem of creating software and methodological support for determining the mechanical characteristics of materials. Prospects for further research are to create ways to determine other mechanical constants, optimize software, and apply this method to solve the problem of determining the Young's volumetric modulus of anisotropic composite materials used to create functional coatings in shipbuilding.

Keywords: composite materials, the Young modulus, indenter, finite element method.

Постановка проблеми

Одним з основних питань при створенні технологічних виробів для суднового обладнання полімерних композиційних матеріалів (КМ) є забезпечення надійності при їх тривалій експлуатації. Особлива увага приділяється розробці нових методів і матеріалів для захисту корпусів суден від корозії та зносу. При цьому КМ є достатньо складним об'єктом з точки зору вивчення його механічних властивостей, що змінюються в результаті дії енергетичних полів, а також залежать від природи наповнювачів та технології виготовлення. Як правило, пошук нових матеріалів ведеться в напрямках створення нових речовин та комбінування відомих компонентів. Критерієм оцінки параметрів

формування матеріалу є його фізико-механічні властивості. Важливою характеристикою еластичності та міцності матеріалу є його жорсткість або модуль Юнга.

Об'єктом дослідження є процес визначення модуля Юнга пружних матеріалів.

Процес визначення модуля поздовжньої пружності матеріалів з достатньо високою точністю, як правило, пов'язаний з проведенням численних стандартних випробувань. При цьому розміри зразків матеріалів є строго регламентованими [1]. У випадку необхідності визначення модуля Юнга зразка матеріалу нестандартних розмірів постає задача пошуку інших способів визначення модуля поздовжньої пружності.

Предметом дослідження у даній роботі є точність та межі застосування аналітично-експериментального способу визначення модуля Юнга пружних матеріалів, який оснований на визначенні лінійних переміщень, що виникають при навантаженні зразків матеріалів на малій площадці за допомогою індентора.

Для зразка матеріалу, що встановлений на жорстку основу та піддається місцевому натисненню індентором, необхідно визначити переміщення індентора у напрямі прикладеного навантаження, що дорівнюють місцевій деформації зразка, та обчислити модуль Юнга матеріалу шляхом порівняння переміщень індентора: знайденого експериментально та розрахованого теоретично із застосуванням методу скінченних елементів (МСЕ).

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Найчастіше пружні характеристики матеріалів визначають на спеціальному обладнанні для розтягування, стиснення та згину зразків [2]. Інші методи визначення модулів пружності: ультразвуковий [3, 4], із застосуванням вбудованих у матеріал волоконно-оптичних датчиків деформацій [5–7], із застосуванням засобів тензометрії [8], – потребують використання вартісного устаткування, спеціальних лабораторних умов, великих затрат часу на проведення та обробку результатів експериментів. Сучасні методи оцінки та прогнозування деформаційних властивостей ґрунтуються на математичному моделюванні процесів, що відбуваються у матеріалах під дією навантаження [9–11].

У даній роботі пропонується аналітично-експериментальний спосіб визначення модуля Юнга пружних матеріалів, зокрема полімерних КМ. В основу покладено визначення вертикальних переміщень, що утворюються при стисненні зразків під дією індентора. Розрахунки для обчислення модуля Юнга виконуються за даними експериментальних вимірів локальних деформацій та порівнюються з результатами, які отримано для моделі зразка МСЕ.

Чисельний розв'язок відповідної граничної задачі знайдено засобами універсальної програмної системи скінченно-елементного аналізу (СЕА) ANSYS за умови дискретизації розрахункової області окремо гексаедрами та тетраедрами, а також, програмно-методичного забезпечення, розробленого автором статті у середовищі математичного процесора Maple, із можливостями геометричного моделювання об'єктів із використанням примітивів у формі октаєдрів та тетраєдрів. Результати тестування авторського програмного забезпечення на задачі про розподіл температури у замкненій області скінченного об'єму опубліковані у роботах [12, 13].

Формулювання мети дослідження

Метою роботи є розробка способу визначення модуля поздовжньої пружності матеріалу та порівняльний аналіз результатів математичного моделювання процесу, що відбувається у матеріалі під дією навантаження, та модуля Юнга, обчисленого експериментально.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо зразок ізотропного полімерного КМ у призматичної форми лінійних розмірів $a=110$ мм, $b=15$ мм, $h=10$ мм (рис. 1), до якого прикладене розподілене навантаження $P=100$ Н, що є результатом дії індентора циліндричної форми діаметра $d=2$ мм.

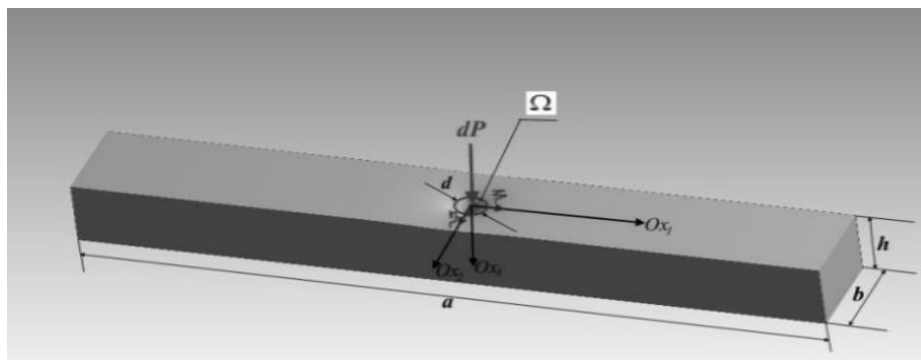


Рис. 1. Геометрія зразка матеріалу

Задача розрахунку переміщень у однорідному ізотропному пружному тілі за умови відсутності масових сил описується системою рівнянь Ламе [14]:

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad (1)$$

де $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2 + \partial^2 / \partial x_3^2$ – оператор Лапласа,

u_i – переміщення вздовж координатної осі Ox_i ;

x_i – прямокутні декартові координати;

ν – коефіцієнт Пуасона;

$\Theta = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2 + \partial u_3 / \partial x_3$.

Позначимо $\Omega = \{(\xi, \eta) : \xi^2 + \eta^2 \leq d^2/4\}$ – множину точок верхньої грані $S_1 = \{(x_1, x_2, 0) : |x_1| \leq a/2, |x_2| \leq b/2\}$, де ξ, η – прямокутні декартові координати в області Ω .

Сформулюємо граничні умови:

$$1) \quad \sigma_{ii}|_{\Omega} = 0 \quad (i=1,2), \quad \sigma_{ij}|_{\Omega} = 0 \quad (i, j = \overline{1,3}, i \neq j), \quad \sigma_{33}|_{\Omega} = P/A, \quad (2)$$

де σ_{ij} – механічні напруження;

$A = \pi d^2/4$ – площа області $\Omega \in S_1$ прикладеного навантаження;

$$2) \quad u_1|_{S_2} = u_2|_{S_2} = u_3|_{S_2} = 0 \quad (3)$$

де $S_2 = \{(x_1, x_2, h) : |x_1| \leq a/2, |x_2| \leq b/2\}$;

$$3) \quad \sigma_{ij}|_{(S_1 \setminus \Omega) \cup S_3} = 0 \quad (i, j = \overline{1,3}), \quad (4)$$

де $S_3 = \{(\pm a/2, x_2, x_3) : |x_2| \leq b/2, 0 \leq x_3 \leq h\} \cup \{(x_1, \pm b/2, x_3) : |x_1| \leq a/2, 0 \leq x_3 \leq h\}$.

Для первинної оцінки переміщень в області прикладеного навантаження P у напрямку осі Ox_3 застосуємо розв'язок задачі Буссінеска для пружного ізотропного півпростору [14]:

$$u_3 = \frac{1+\nu}{2\pi E} \iint_{\Omega} \left(\frac{2(1-\nu)}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right) p d\Omega, \quad (5)$$

де ν – коефіцієнт Пуасона;

E – модуль Юнга;

ξ, η – прямокутні декартові координати в області Ω ;

$dP = p(\xi, \eta) d\xi d\eta = p d\Omega$ – елементарне навантаження;

$r = \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2 + x_3^2}$ – відстань між точками $K(\xi, \eta, 0) \in \Omega$ та $K_1(x_1, x_2, x_3) \notin \Omega$.

Формула (5) не може бути застосована для розрахунку вертикальних переміщень у матеріальній області скінченного об'єму $a \times b \times h$, але різниця відповідних переміщень на верхній та нижній основах зразка $\Delta = u_3(\xi, \eta, 0) - u_3(\xi, \eta, h)$, де $(\xi, \eta) \in \Omega$, дозволяє оцінити порядок величини вертикальних переміщень як $u_3 \leq \Delta$. На рис. 2 зображено графік залежності величини переміщень u_3 від координати x_3 , обчислених за формулою (5) для $E = 1 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,33$. Величина $\Delta \approx 0,0518 \text{ мм}$ знайдена для $h = 10 \text{ мм}$.

Розв'язок задачі (1), (2) – (4) знайдемо МСЕ, використовуючи програмно-методичне забезпечення, розроблене автором статті у середовищі математичного процесора Maple для розрахунку характеристик напружено-деформованого стану моделей твердих тіл, та засобами універсальної програмної системи CEA ANSYS.

Результати розрахунку переміщень u_3 в області Ω для КМ з відповідними пружними характеристиками представлені в табл. 1, де $M1, M2$ – епоксидні композити на основі олігомеру ЕД20.

Відмітимо, що отримані аналітично значення u_3 в області прикладеного навантаження відповідають первинній оцінці $\Delta \approx 0,0518 \text{ мм}$, розрахованій для заданих геометричних та пружних характеристик зразків матеріалів $M1$ та $M2$.

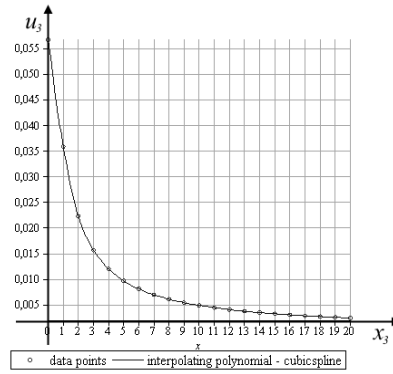


Рис. 2. Графік переміщень $u_3 = u_3(x_3)$

Таблиця 1

Вертикальні переміщення u_3 (мм)

Матеріал	Характеристики пружності		Види скінченно-елементних решіток		
			Тетраедр, октаедр	ANSYS	
	E (ГПа)	ν		гексаедр	тетраедр
M1	1	0,33	0,03320	0,03309	0,02620
M2	1	0,33	0,02960	0,03085	0,02991

Для проведення механічного випробування зразок матеріалу (рис. 1) встановлюють на жорстку основу та навантажують на відносно малій площадці Ω у напрямку, нормальному до поверхні, заданим навантаженням P кінцем індентора циліндричної форми діаметра 2 мм. На рис. 3 зображено експериментальну криву $P = P(u_3)$, що відповідає $P_{max} = 100 \text{ Н}$ для матеріалу M1.

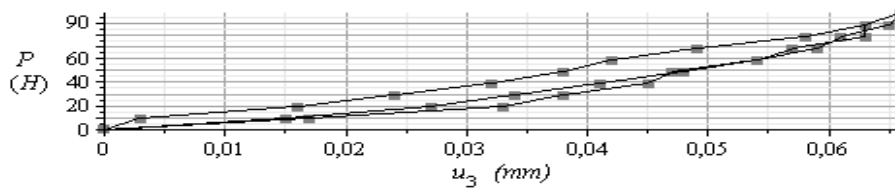


Рис. 3. Діаграма навантажень зразка M1

Величина модулю пружності E визначається формулою:

$$E = k / \left(\frac{\Delta u_3}{\Delta P} \right)$$

де k – коефіцієнт лінійної залежності вертикальних переміщень u_3 від величини, обереної до E .

На основі даних чисельного експерименту для розрахунку переміщень u_3 , які отримані МСЕ, що відповідають дискретно заданим значенням модуля Юнга від 1 ГПа до 5 ГПа (інтервал очікуваних значень E), методом найменших квадратів (МНК) побудуємо лінійну апроксимацію $u_3 = ky$, де $y = 1/E$. На рис.4 для матеріалу M1 зображено графік залежності $u_3 = k \cdot (1/E)$ локальних деформацій від модуля поздовжньої пружності, які розраховані із застосуванням програмного забезпечення, що розроблене автором статті. Кутовий коефіцієнт лінійної апроксимації при цьому $k \approx 0,0299$. Для апроксимацій, які побудовані за даними експерименту засобами універсальної програмної системи CEA ANSYS із використанням решіток з гексаедрів та тетраедрів, відповідно маємо $k \approx 0,0328$ та $k \approx 0,0262$.

Відношення $\frac{\Delta u_3}{\Delta P}$ визначаємо як середнє експериментальне значення пружних деформацій, що відповідає загальному навантаженню P_{max} , тобто

$$\frac{\Delta u_3}{\Delta P} = \frac{P_{\max}}{mn} \sum_{i=1}^{mn} \frac{u_{3,i} - u_{3,i-1}}{P_i - P_{i-1}},$$

де m – кількість навантажень/розвантажень;

n – кількість грузів;

$u_{3,i}$ – деформації, що відповідають навантаженням P_i ($i = \overline{1, n}$),

причому $P = \sum_{i=1}^n P_i$.

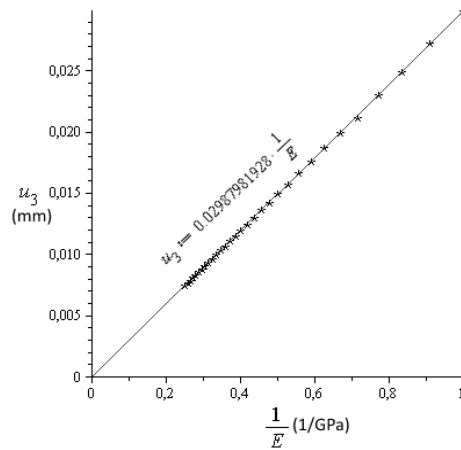


Рис. 4. Апроксимація МНК $u_3 = k \cdot (1/E)$ даних чисельного експерименту для матеріалу M1

Діаграмі навантажень зразка матеріалу M1 відповідають значення $m = 3$, $n = 10$, $\frac{\Delta u_3}{\Delta P} \approx 0,07496$ (мм). Результати обчислення модуля поздовжньої пружності зразків матеріалів M1 та M2 аналітично-експериментальним способом представлені в табл. 2.

Таблиця 2

Розрахунок модуля Юнга

Матеріал	Види скінченно-елементних решіток	k (мм*ГПа)	$\frac{\Delta u_3}{\Delta P}$ (мм)	E (ГПа)
M1	Тетраedr, октаedr	0,0299	0,007496	3,99
	ANSYS (гексаedr)	0,0328		4,38
	ANSYS (тетраedr)	0,0262		3,50
M2	Тетраedr, октаedr	0,0301	0,00915	3,29
	ANSYS (гексаedr)	0,0331		3,37
	ANSYS (тетраedr)	0,0299		3,23

Для перевірки достовірності отриманих розрахунків зразки матеріалів M1 та M2 було випробувано на триточковий згин. За формулами, які наведені в ГОСТ 955081 [2, С. 7], отримано експериментальні значення модулів Юнга $E = 3,8$ ГПа для M1 та $E = 3,3$ ГПа для M2. Значення відносної похибки даних за двома способами визначення модуля поздовжньої пружності в табл. 3.

Таблиця 3

Відносна похибка відхилення значення модуля Юнга за даними двох експериментів

Матеріал	Модуль Юнга (ГПа)		Відносна похибка (%)
	Аналітично-експериментальний спосіб	Експериментальний спосіб на згин	
M1	3,99	3,8	5
	4,38		15,3
	3,50		7,9
M2	3,29	3,3	0,3
	3,37		2,1
	3,23		3,03

Висновки

1. У даній роботі вперше пропонується спосіб визначення модуля Юнга пружних матеріалів, в основу якого покладено визначення переміщень індентора на площадці малих розмірів, що виникають під дією прикладеного навантаження, та місцевих деформацій моделі зразка матеріалу, розрахованими МСЕ.

2. Запропонований спосіб визначення модуля Юнга пружних матеріалів за точністю обчислень не поступається широко використовуваному експериментальному способу випробування на триточковий згин. При цьому розміри зразка не мають бути строго регламентовані стандартами ГОСТ [1] та допускається використання вже зруйнованих зразків. Також даний спосіб є дуже простим та не вимагає наявності вартісного устаткування для проведення експериментів.

3. Використання чисельних методів, зокрема МСЕ, для розрахунку локальних деформацій, що виникають у пружному тілі при заданому навантаженні, вирішує додаткову задачу прогнозування залежності деформацій від модуля поздовжньої пружності зразка досліджуваного матеріалу.

4. За результатами випробування зразків КМ на стиснення запропонованим способом встановлено, що відносна похибка відхилення значень модулів Юнга від отриманих при випробуванні експериментальних зразків способом на триточковий згин становить 0,3-5% при використанні програмно-методичного забезпечення, розробленого автором статті; 2,1-15,3% та 3,03-7,9% при застосуванні універсальної системи СЕА ANSYS із дискретизацією розрахункової області гексаедрами та тетраедрами відповідно. Величина відносної похибки відхилень непрямих вимірювань модулів поздовжньої пружності зразків матеріалів у двох різних експериментах вказує на валідність результатів, які отримані засобами СЕА, за умови дискретизації розрахункової області тетраедрами та тетраедрами у ансамблі з октаедрами.

5. Даний спосіб може бути використаний для створення засобів вимірювання модуля поздовжньої пружності при розробці нових матеріалів та під час контролю механічних властивостей готових виробів при їх виробництві в загальному та транспортному машинобудуванні.

Список використаної літератури

1. Пластмассы. Методы определения модуля упругости при растяжении, сжатии и изгибе: ГОСТ 955081. – [Чинний від 19820107]. – М.: Издво стандартов, 2004. – 8 с.
2. Беляев Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 607 с.
3. Moore P. Nondestructive Testing Handbook / P. Moore // American Society for Nondestructive Testing. – 2007. – Vol. 7. – P. 319–321.
4. Мокійчук В. М. Методика оцінювання невизначеності вимірювання пружних констант матеріалів / В. М. Мокійчук, О. В. Монченко, Ю. А. Олійник // Системи обробки інформації. – 2016. – Вип. 6 (143). – С.9396.
5. Lee D. Monitoring of fatigue damage of composite structures by using embedded intensitybased optical fiber sensors / D. Lee, J. Lee, I. Kwon, D. Seo // Smart Materials and Structures. – 2001. – Vol. 10. – P. 285–292.
6. Leung C. K. Delamination detection in laminate composites with an embedded fiber optical interferometric sensor / C. K. Leung, Z. Yang, Y. Xu, P. Tong, S. K. Lee // Sensors and Actuators A: Physical – 2005. – Vol. 119. – №2. – P. 336–344. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2004.10.007>
7. Кошелева Н. А. Экспериментальные исследования по определению деформаций образцов из полимерного композиционного материала с применением волоконно-оптических датчиков / Н. А. Кошелева, Г. С. Шипунов, А. А. Воронков, Н. П. Меркушева, А. А. Тихонова // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника – 2017. – № 50. – С. 26–35.
8. Богодухов С. И. Определение модуля упругости различных материалов с применением средств тензометрии / С. И. Богодухов, В. С. Гарипов, Е. В. Солосина // ВЕСТНИК ОГУ – 2014. – №4. – С. 289–294.
9. Балахонов Р. Р. Иерархическое моделирование неоднородной деформации и разрушения материалов композиционной структуры / Р. Р. Балахонов // Физическая мезомеханика – 2005. – Т. 8. – №3. – С. 107–128.
10. Букетов А. В. Прогнозування деформаційних властивостей епоксидних композитних матеріалів / А. В. Букетов, Л. В. Кравцова, А. П. Пірог // Вісник ЖДТУ – 2013. – №4(67). – С. 7–11.
11. Букетов А. В. Епоксидні нанокompозити: монографія / А. В. Букетов, О. О. Сапронов, В. Л. Алексенко. – Херсон: ХДМА, 2015. – 184 с.
12. Мотайло А. П. О численном решении стационарной задачи теплопроводности методом конечных элементов на решетке тетраэдральной-октаэдральной структуры / А. П. Мотайло // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2014. – №25(196). – Вып. 37. – Белгород: "НИУ БелГУ", 2014. – С. 119–127.
13. Мотайло А. П. Побудова базису біпіраміди / А. П. Мотайло, А. Н. Хомченко, Г. Я. Тулущенко // Радіоелектроніка, інформатика, управління – №4 (39). – Запоріжжя: ЗНТУ, 2016. – С. 29–36.
14. Демидов С. П. Теория упругости / С. П. Демидов. – М.: Высшая школа, 1979. – 432 с.