БАЗИС БІПІРАМІДИ З ДВОМА РУХОМИМИ ВУЗЛАМИ

Мотайло А.П.
к.т.н., доцент кафедри природничо-наукової підготовки
Херсонська державна морська академія

Одним із способів вирішення проблеми зменшення часової складності алгоритму метода скінченних елементів (МСЕ) є застосування альтернативних решіток для дискретизації розрахункової області. Зокрема, в тривимірному просторі при розв'язанні граничних задач еліптичного типу ефективними виявляються решітки тетраедрально-октаедральної структури, які не представлені в комерційних пакетах програмного забезпечення (ANSYS, ABAQUS, ЛІРА), що реалізують МСЕ. Отже, існує задача дослідження скінченного елемента (СЕ) у формі октаедра та його узагальнення – біпіраміди.

В роботі [1] побудовано два базиси біпіраміди з одним рухомим вузлом, які містять відповідно два та один параметри, що дозволяють надавати базисним функціям додаткових доцільних в МСЕ інтерполяційних властивостей. На основі аналізу апроксимаційних якостей базисних функцій [2] визначено умови використання біпірамід в скінченно-елементних решітках. Критерієм оцінки якості апроксимації вважається мінімальний слід матриці жорсткості біпіраміди.

Метою даної роботи є побудова базисів біпіраміди з двома рухомими вузлами, дослідження їх апроксимаційних властивостей в залежності від значень параметрів видовження/стиснення півосей даного багатогранника, а також визначення умов використання даного СЕ у решітках тетраедрально-октаедральної структури.

Розглядається біпіраміда з сімома вузлами інтерполяції, які розташовані в її вершинах та точці перетину діагоналей (рис.1). Вважається, що точки K_1, K_3, K_4, K_6 є рівновіддаленими від K_0 на відстань $a\left(a \in R\right)$, а відрізки K_0K_2 та K_0K_5 можуть бути довільної довжини:

$$K_0K_2 = p \cdot a = b,\ K_0K_5 = q \cdot a = c, \tag{1}$$

де $p, q > 0$ та $p, q \in R$.

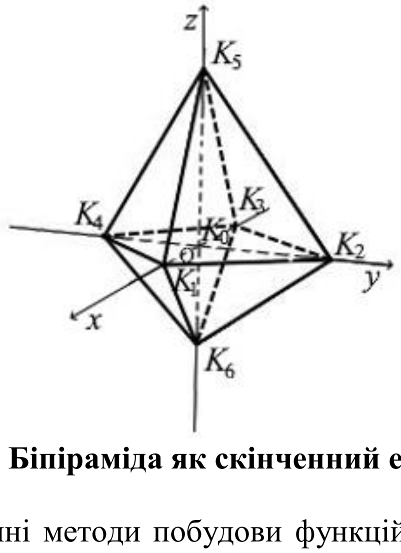

Рис. 1. Біпіраміда як скінченний елемент

Застосовуючи геометричні методи побудови функцій скінченно-елементного базису, які асоційовано з вершинами біпіраміди, легко отримати:

$$NS_{1,\,3} = \frac{1}{2a^2} x(x \pm a);$$

$$NS_2 = \frac{1}{b(a+b)} y(y+a);\ NS_4 = \frac{1}{a(a+b)} y(y-b); \tag{2}$$

$$NS_5 = \frac{1}{c(a+c)} z(z+a);\ NS_6 = \frac{1}{a(a+c)} z(z-c).$$

Функцію, що відповідає центральному вузлу, можна знайти з рівності:

$$NS_0 = 1 - \frac{1}{pqa^2}\left(pqx^2 + q\left(y^2 + a(1-p)y\right) + p\left(z^2 + a(1-q)z\right)\right). \quad (3)$$

Застосувавши операцію внутрішньої конденсації, можна розподілити внесок центральної базисної функції по зовнішніх вузлах біпіраміди:

$$NC_i = NS_i + \alpha \cdot NS_0,\ i = \{1,3\},$$

$$NC_2 = NS_2 + \beta_1 \cdot NS_0,\ NC_4 = NS_2 + \beta_2 \cdot NS_0, \quad (4)$$

$$NC_5 = NS_5 + \gamma_1 \cdot NS_0,\ NC_6 = NS_6 + \gamma_2 \cdot NS_0,$$

де $2\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1;\ 0 \le \alpha \le 0,5.$

Задовольняючи умовам повноти базису [3], необхідно додати співвідношення вагових коефіцієнтів:

$$\beta_1 = \frac{1-2\alpha}{p+1};\ \beta_2 = p\beta_1;\ \gamma_1 = \frac{1-2\alpha}{q+1};\ \gamma_2 = q\gamma_1. \quad (5)$$

Оскільки ваговий коефіцієнт α змінюється в інтервалі $0 \le \alpha \le 0,5$, обмеження для інших коефіцієнтів мають вид: $0 \le \beta_1 \le \frac{1}{p+1};\ 0 \le \beta_2 \le \frac{p}{p+1};\ 0 \le \gamma_1 \le \frac{1}{q+1};\ 0 \le \gamma_2 \le \frac{q}{q+1}.$

Отже, базисні функції конденсованого базису визначаються за формулами (4), (5).

Побудовані функції $\{NC_i\}_{i=1}^{6}$ скінченно-елементного базису біпіраміди є функціями коефіцієнтів p,q. Вважаючи критерієм якості апроксимації мінімальний слід матриці жорсткості (теплопровідності) біпіраміди, можна показати, що мінімум функції сліду матриці жорсткості досягається в точці $(p;q) \approx (0,744;0,744)$, і становить приблизно 2,475 (рис.2).

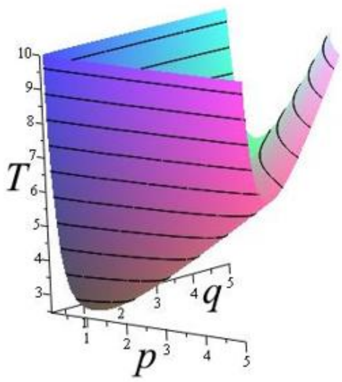

Рис.2. Графік мінімального сліду матриці жорсткості

Відповідно до обмежень, які використовують в ANSYS для СЕ неправильної геометричної форми, [4, 5] можна вказати проміжки зміни функції параметрів біпіраміди $0,5 \le (p+1)q \le 1,5$ при невисоких вимогах до точності отримуваних розв'язків і $0,8 \le (p+1)q \le 1,2$ – при високих вимогах до точності отримуваних розв'язків.

Список літератури:

1. Мотайло А. П., Хомченко А. Н., Тулученко Г. Я. (2016). Побудова базису біпіраміди. Радіоелектроніка, інформатика, управління. 4 (39), 29–36. doi: https://doi.org/10.15588/1607-3274-2016-4-4

2. Секулович М. (1993) Метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1993. 664 с.

3. Zienciewicz, O. C. (2014). Introductory Lectures on the Finite Elements Method. Springer, 99. doi: https://doi.org/10.1007|978-3-7091-2973-9

4. ANSYS Icepak 12.1:User's Guide. Checking the Skewness. Available at:
http://orange.engr.ucdavis.edu/Documentation12.1/121/ICEPAK/iceug.pdf

5. ANSYS Fluent. Available at:
https://www.sharcnet.ca/Software/Fluent6/html/udf/node1.htm