КУБАТУРНА ФОРМУЛА ПО ОКТАЕДРУ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНОГО ПОЛІНОМА ОКРЕМОГО ВИДУ

А. Мотайло, В. Алексенко
Херсонська державна морська академія
kafedra.pnp@ukr.net

Більшість задач аналізу технічних систем зводиться до розв'язання систем диференціальних рівнянь. У випадку, коли математична модель технічної системи не має аналітичного розв'язку, застосовують чисельні методи, зокрема, метод скінченних елементів (МСЕ). Дискретною моделлю даного метода є система лінійних алгебраїчних рівнянь, яка містить скінченно-елементні матриці (жорсткості, мас, демпфірування). Для знаходження елементів вказаних матриць застосовують чисельне інтегрування по області комірки скінченно-елементної решітки добутків базисних функцій та їх похідних. У випадку, коли розрахункова область дискретизована решіткою, яка містить скінченні елементи (СЕ), які не представлені у бібліотеках систем скінченно-елементного аналізу (ANSYS, NASTRAN, ЛІРА тощо), необхідно розв'язати задачу чисельного інтегрування по області нового СЕ. У роботі [1] показано, що при розв'язанні задач візуалізації тривимірних об'єктів решітка із комірками у формі октаедра з кусково-лінійними базисними функціями, є ефективнішою за часом обчислень порівняно з тетраедральною решіткою. У роботі [2] продовжено дослідження властивостей решітки тетраедрально-октаедральної структури. Авторами [2] побудовано низку систем базисних функцій октаедра та обчислено локальні характеристики даного СЕ з різними наборами базисних функцій. За результатами порівняльного аналізу виявлено, що за двома характеристиками у вигляді значень визначника та числа обумовленості у нормі L_2 матриці мас октаедр з тригонометричними базисними функціями наділений кращими інтерполяційними якостями. Мета даної роботи – побудувати кубатурну формулу по області октаедра з тригонометричним базисом для обчислення елементів скінченно-елементних матриць.

Нехай $\Omega = \{(x, y, z) : |x| + |y| + |z| \le 1\}$ – область інтегрування у формі октаедра. Тоді для октаедра з тригонометричними базисними функціями елементи матриці жорсткості $k = [k_{pq}] = \iiint_\Omega B^T DBdxdydz$, де $B^T = (\partial\varphi_r/\partial x, \partial\varphi_r/\partial y, \partial\varphi_r/\partial z)$ – матриця градієнтів базисних функцій $\varphi_r = \varphi_r(x, y, z)$, D – матриця пружності, є тригонометричними поліномами виду

$$T_1(x, y, z) = \sum_{|\alpha|=0}^{1} a_\alpha \cos(\alpha_1 \pi x) \cdot \cos(\alpha_2 \pi y) \cdot \cos(\alpha_3 \pi z), \tag{1}$$

де a_α – коефіцієнти, $\alpha = \alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – мультиіндекс, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i$, $\alpha_i = \{0,1\}$, $i = \overline{1,3}$. Функції $T_1(x, y, z)$ є парними за кожним аргументом та $2l_1$-періодичними, де $l_1 = 1$. Елементи матриці мас $g = [g_{rs}] = \iiint_\Omega \varphi_r \varphi_s dxdydz$, де $r, s = \overline{1,6}$, є тригонометричними поліномами виду

$$T_2(x, y, z) = B_0 + \sum_{|\beta|=0}^{2} b_\beta \sin(\beta_1 \pi x/2) \cdot \sin(\beta_2 \pi y/2) \cdot \sin(\beta_3 \pi z/2), \tag{2}$$

де B_0, b_β – коефіцієнти, $\beta = \beta(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – мультиіндекс, $|\beta| = \sum_{i=1}^{3} \beta_i$, $\beta_i = \{0,1\}$, $i = \overline{1,3}$. Функції $T_2(x, y, z)$ є непарними за кожним аргументом та $2l_2$-періодичними, де $l_2 = 2$.

Враховуючи геометрію області Ω та структурні властивості функцій $T_1(x, y, z)$ та $T_2(x, y, z)$, побудуємо кубатурну формулу:

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dxdydz \approx \sum_{i=1}^{6} A_i f(x_i, y_i, z_i) = I_R(f), \qquad (3)$$

де $f(x, y, z)$ – неперервна на Ω функція, A_i – вагові коефіцієнти, (x_i, y_i, z_i) – вузли інтерполяції, які розташовані на півосях октаедра на відстані p від центра $(0,0,0)$.

Вважаючи, що формула (3) є точною для тригонометричного полінома окремого виду $T(x, y, z) = T_1(x, y, z) + T_2(x, y, z)$, отримаємо $A_i = 2/9$, $p = (1/\pi)\arccos(18/\pi^2 - 2)$. Тоді формула (3) запишеться у вигляді:

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dxdydz \approx (2/9)(f(\pm p,0,0) + f(0,\pm p,0) + f(0,0,\pm p)), \qquad (4)$$

де $p = (1/\pi)\arccos(18/\pi^2 - 2)$.

Точність формули (4) перевірено при обчисленні елементів матриць жорсткості та мас лінійного октаедра з тригонометричними базисними функціями.

Похибка у нормі $C(\Omega)$ становить $\Delta_k = \max\limits_{k_{pq}, p, q = \overline{1,6}} |R_4(f)| = 1.88 \cdot 10^{-10}$ для $f = k_{pq}$ та $\Delta_g = \max\limits_{g_{rs}, r, s = \overline{1,6}} |R_4(f)| = 1.1 \cdot 10^{-10}$ для $f = g_{rs}$, де $R_4(f) = \iiint_\Omega f(x, y, z)dxdydz - I_R(f)$ – залишок кубатурної формули. На рис.1 зображено розподіл похибки за елементами локальних скінченно-елементних матриць октаедра.

а) б)

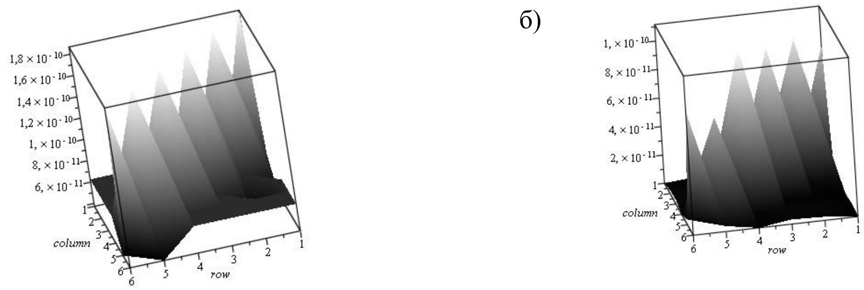

Рис. 1. Розподіл похибки $|R_4(f)|$ за елементами: а) матриці жорсткості; б) матриці мас

Висновки. У роботі побудовано інтерполяційну кубатурну формулу по області октаедра з 6 вузлами інтерполяції, яка є точною для тригонометричних поліномів окремого виду. Отримані результати перевірено при обчисленні елементів локальних матриць жорсткості та мас для системи тригонометричних базисних функцій октаедра.

[1] Grosso R., Greiner G. Hierarchical Meshes for Volume Data. Computer Graphics International 1998:.Proceeding of the Conference (Washington, July 22–27, 1998). Washington, 1998. P. 761–771.

[2] Мотайло А. П., Хомченко А. Н. Порівняльний аналіз базисів октаедра. Новітні наукові досягнення – 2013: матер. IX Міжнар. наук.-практ. конф. Серія: Математика (Софія, 17–25 березня 2013). Софія, 2013.Т. 21. С. 28–33.

CUBATURE FORMULA FOR TRIGONOMETRICPOLYNOMIAL OF TYPE OF PART ON OCTAHEDRON

A. Motailo, V.Aleksenko
Kherson State Maritime Academy
kafedra.pnp@ukr.net

One of requirements to the mathematical model of the technical system there are minimization of the use of machine resource at the receipt of decision of the differential equations system. One of methods of implementation of requirement there is the use in the finite elements method (FEM) of alternative lattices, in particular, of the tetrahedral-octahedral structure. For realization of algorithm of FEM with the use of octahedron it is necessary to get the formulas of numeral integration for the areas of this polyhedron.

In this article the cubature formula of with 6 knots of interpolation for the areas of octahedron is constructed. This formula is exact for the trigonometric polynomial of type of part. The got results are tested at the calculation of elements of local matrices of stiffness and masses for the system of trigonometric bases functions of octahedron. Exactness of the dot results satisfies to the engineering requirements.

ДОСЛІДЖЕННЯ ДОЦІЛЬНОСТІ РОЗРОБКИ МОБІЛЬНОГО ДОДАТКУ ДЛЯ РОЗШИРЕННЯ ФУНКЦІОНАЛУ САЙТУ ФАКУЛЬТЕТУ ФЕКС

Д. Мороз
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
dmitriy@moroz.cc

Останнім часом спостерігається тенденція різкого збільшення кількості смартфонів та планшетів відносно комп'ютерів. Згідно з останньою статистикою, використання інтернет трафіку у світі, кількість загального трафіку мобільних пристроїв на 2% більше від кількості трафіку персональних комп'ютерів [1]. Причинами такого збільшення стали декілька факторів, а саме: доступні ціни на смартфони, розширення карти покриття мереж 3G та 4G серед вітчизняних мобільних операторів, випуск провідними компаніями оновлень для мобільних версій своїх браузерів, що дозволило оптимізувати час завантаження веб-сторінки в умовах відсутності стабільного з'єднання з мережею інтернет.