БАЗИС БІПІРАМІДИ З ТРЬОМА РУХОМИМИ ВУЗЛАМИ

Мотайло А.П.
к.т.н., доцент, доцент кафедри природничо-наукової підготовки
Херсонська державна морська академія

При розв’язанні граничних задач математичної фізики методом скінченних елементів (МСЕ) для областей в 3D обчислювальна складність алгоритму швидко зростає. З кожним кроком уточнення дискретної моделі відповідно до заданих умов у розрахунковій області та на її границі збільшуються час та об’єм пам’яті, необхідні для реалізації МСЕ. У випадках, коли задача не може бути розв’язана за прийнятний час, одним із способів зменшення складності обчислень є застосування альтернативних решіток для побудови дискретної моделі. В тривимірному просторі при розв’язанні граничних задач еліптичного типу ефективними виявляються решітки тетраедрально-октаедральної структури, які не представлені в комерційних пакетах скінченно-елементного аналізу (ANSYS, ABAQUS, ЛІРА). Отже, існує задача дослідження скінченного елемента (СЕ) у формі октаедра та його узагальнення – біпіраміди, який краще за правильний багатогранник може бути пристосований до границь розрахункової області.

У роботах [1, 2] побудовано базиси біпіраміди з одним та двома рухомими вузлами, які містять відповідно два та три параметри, що дозволяють надавати базисним функціям додаткових доцільних в МСЕ інтерполяційних властивостей. На основі аналізу апроксимаційних якостей базисних функцій [3] визначено умови використання біпірамід в скінченно-елементних решітках. При цьому критеріями оцінки якості апроксимації вважаються мінімальний слід матриці жорсткості біпіраміди та відповідність показнику відхилення від об’єму правильного багатогранника.

Метою даної роботи є побудова базисів біпіраміди з трьома рухомими вузлами, дослідження їх апроксимаційних властивостей в залежності від значень параметрів видовження/стиснення півосей даного багатогранника, а також визначення умов використання даного СЕ у решітках тетраедрально-октаедральної структури.

Розглядається біпіраміда з сімома вузлами інтерполяції, які розташовані в її вершинах та точці перетину діагоналей (рис.1). Вважається, що точки K_3, K_4, K_6 є рівновіддаленими від K_0 на відстань $a\left(a \in R\right)$, а відрізки K_0K_1, K_0K_2 та K_0K_5 можуть бути довільної довжини:

$$K_0K_1 = r \cdot a = t,\ K_0K_2 = p \cdot a = b,\ K_0K_5 = q \cdot a = c, \qquad (1)$$

де r, p, q - параметри видовження/стиснення відносно a півосей K_0K_1, K_0K_2, K_0K_5 біпіраміди, які відповідають руху вузлів K_1, K_2, K_5 вздовж відповідного відрізку, при цьому $r, p, q \in R,\ r, p, q > 0.$

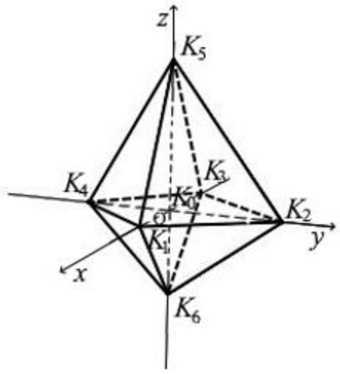

Рис.1. Біпіраміда як скінченний елемент

Застосовуючи геометричні методи побудови функцій скінченно-елементного базису, які асоційовано з вершинами біпіраміди, легко отримати:

$$NS_1 = \frac{1}{t(a+t)} x(x+a);\ NS_3 = \frac{1}{t(a+t)} x(x-t);$$
$$NS_2 = \frac{1}{b(a+b)} y(y+a);\ NS_4 = \frac{1}{a(a+b)} y(y-b); \qquad (2)$$
$$NS_5 = \frac{1}{c(a+c)} z(z+a);\ NS_6 = \frac{1}{a(a+c)} z(z-c).$$

Центральну функцію, що відповідає вузлу K_0, можна знайти з рівності:

$$NS_0 = 1 - \frac{1}{rpqa^2}\left(pq(x^2 + a(1-r)x) + rq\left(y^2 + a\left(1-p\right)y\right) + rp\left(z^2 + a\left(1-q\right)z\right)\right). \qquad (3)$$

Застосувавши операцію внутрішньої конденсації, можна розподілити внесок центральної базисної функції по зовнішніх вузлах біпіраміди:

$$NC_1 = NS_1 + \alpha_1 \cdot NS_0,\ NC_3 = NS_3 + \alpha_2 \cdot NS_0,$$
$$NC_2 = NS_2 + \beta_1 \cdot NS_0,\ NC_4 = NS_4 + \beta_2 \cdot NS_0, \qquad (4)$$
$$NC_5 = NS_5 + \gamma_1 \cdot NS_0,\ NC_6 = NS_6 + \gamma_2 \cdot NS_0,$$

де $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1;\ 0 \le \alpha_1 \le 1.$

Для того, щоб задовольнити умовам повноти базису [4], необхідно додати співвідношення вагових коефіцієнтів:

$$\alpha_2 = r\alpha_1;\ \beta_1 = \frac{1-\alpha_1(1+r)}{p+1};\ \beta_2 = p\beta_1;\ \gamma_1 = \frac{1-\alpha_1(1+r)}{q+1};\ \gamma_2 = q\gamma_1. \qquad (5)$$

Межі існування вагового коефіцієнта α_1 $(0 \le \alpha_1 \le 1)$ визначають обмеження для інших коефіцієнтів, а саме: $0 \le \alpha_2 \le r;\ 0 \le \beta_1 \le \frac{1}{p+1};\ 0 \le \beta_2 \le \frac{p}{p+1};\ 0 \le \gamma_1 \le \frac{1}{q+1};\ 0 \le \gamma_2 \le \frac{q}{q+1}.$

Отже, базисні функції конденсованого (шестивузлового) базису визначаються за формулами (4), (5).

Побудовані функції $\{NC_i\}_{i=1}^{6}$ скінченно-елементного базису біпіраміди є функціями коефіцієнтів r, p, q. Вважаючи одним з критеріїв якості апроксимації мінімальний слід матриці жорсткості (теплопровідності) біпіраміди, можна показати, що мінімум функції сліду матриці жорсткості досягається в точці $\left(r; p; q\right) \approx \left(0,64917; 0,70588; 0,70593\right)$, і становить приблизно 2,3581.

Задовольняючи іншому критерію якості апроксимації, який використовують в ANSYS для СЕ неправильної геометричної форми, [5, 6] можна визначити проміжки зміни функції параметрів біпіраміди $3 \le rpq + r\left(p+1\right) + p(q+1) + q(r+1) \le 5$, які діють при невисоких вимогах до точності отримуваних розв'язків і $3,6 \le rpq + r\left(p+1\right) + p(q+1) + q(r+1) \le 4,4$ – при високих вимогах до точності отримуваних розв'язків.

Список літератури:

1. Мотайло А. П., Хомченко А. Н., Тулученко Г. Я. (2016). Побудова базису біпіраміди. Радіоелектроніка, інформатика, управління. 4 (39), 29–36. doi: https://doi.org/10.15588/1607-3274-2016-4-4

2. Мотайло А.П. Побудова базису біпіраміди з двома рухомими вузлами. Системи та технології. Т. 65, №1. Дніпро, 2023. С.7-12. doi: https://doi.org/10.32782/2521-6643-2023.1-65.1

3. Секулович М. (1993) Метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1993. 664 с.

4. Zienciewicz, O. C. (2014). Introductory Lectures on the Finite Elements Method. Springer, 99. doi: https://doi.org/10.1007|978-3-7091-2973-9

5. ANSYS Icepak 12.1:User's Guide. Checking the Skewness. Available at:
http://orange.engr.ucdavis.edu/Documentation12.1/121/ICEPAK/iceug.pdf
6. ANSYS Fluent. Available at:
https://www.sharcnet.ca/Software/Fluent6/html/udf/node1.htm