КУБАТУРНА ФОРМУЛА НА ОКТАЕДРІ П'ЯТОГО АЛГЕБРАЇЧНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ

Мотайло А.П.
Херсонська державна морська академія
(Україна)

Сучасні методи розрахунку та проектування складних об'єктів транспортної галузі неможливі без застосування комп'ютерних технологій. Останні дозволяють виконати необхідні обчислення для моделювання всіх процесів життєвого циклу досліджуваного об'єкту в залежності від режимів роботи, умов експлуатації, обраних матеріалів тощо.

При розв'язанні задач математичної фізики в області складної геометричної форми застосовують метод скінченних елементів (МСЕ). Основним недоліком МСЕ є потреба великого обсягу пам'яті комп'ютера. Якщо область задачі є тривимірною, то при розрахунку моделей значно зростає часова складність алгоритму МСЕ.

Одним із способів оптимізації часу скінченно-елементних розрахунків є використання альтернативних решіток, що містять скінченні елементи, які не представлені у бібліотеках сучасних програмних комплексів, що реалізують МСЕ. Так у роботах [1-3] для дискретизації просторової області застосовано тетраедрально-октаедральні решітки. У роботі [3] досліджено умови збіжності чисельного розв'язку МСЕ до точного на решітках тетраедрально-октаедральної структури при розв'язанні граничних задач для диференціальних рівнянь еліптичного типу. Для програмної алгоритмізації МСЕ у роботах [1-4] отримано формули чисельного інтегрування по області октаедра з кусково-лінійними та квадратичними базисними функціями. Дані кубатурні формули дозволяють знаходити елементи локальної матриці жорсткості лінійного октаедра з кусково-лінійними функціями точно [1-3] та з точністю $4.44\cdot10^{-11}$ для октаедра з квадратичними функціями [4].

При розв'язанні задач динаміки МСЕ дискретним аналогом диференціального рівняння є лінійне алгебраїчне рівняння з коефіцієнтами у вигляді матриць жорсткості, мас та демпфірування. Отже, актуальною є задача побудови кубатурних формул для обчислення елементів локальної матриці мас лінійного октаедра. Метою даної роботи є побудова кубатурної формули, яка дозволяє визначати елементи локальної матриці мас лінійного октаедра з поліноміальним базисом другого порядку.

Нехай $\Omega=\{(x,y,z):|x|+|y|+|z|\le 1\}\subset R^3$ – область інтегрування у формі октаедра, $f(x,y,z)$ – неперервна на Ω функція. Для лінійного октаедра з поліноміальними базисними функціями елементи матриці мас $m=\lfloor m_{pq}\rfloor=\iiint\limits_{\Omega}\varphi^T\rho_l\varphi dxdydz$, де $\varphi_l=\varphi_l(x,y,z)$ – базисні функції, ρ_l – щільність скінченного елемента l, є поліномами степеня $2(n-1)$, де n – степінь поліномів N_l [3]. Якщо $n=2$, то елементи матриці мас скінченного елемента у формі октаедра є алгебраїчними поліномами четвертого степеня.

Для побудови кубатурної формули по октаедру скористаємось основними результатами теорії чисельного інтегрування по найпростішим областям в R^3, які викладено в роботах авторів [5-7]. Кубатурну формулу по октаедру будемо шукати у вигляді:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz\approx\sum_{s=1}^{N}G_s f(x_s,y_s,z_s)=I_R(f),\qquad(1)$$

де G_s – вагові коефіцієнти, (x_s,y_s,z_s) – вузли інтерполяції, N – кількість вузлів.

Вузли інтерполяції формули (1) розташуємо в області Ω, враховуючи центральну та осьову симетрії октаедра. Розіб'ємо усі вузли на дві групи: a_s – вузли, які лежать на осях октаедра, що проходять через протилежні вершини багатогранника, розташовані на відстані p від його центра, та мають координати $(\pm p,0,0)$, $(0,\pm p,0)$, $(0,0,\pm p)$; c_s – вузли, розташовані у точках перетину сфери радіуса r з осями октаедра, що проходять через центри тяжіння протилежних граней багатогранника та мають координати $(\pm r,\pm r,\pm r)$. Тоді формула (1) приймає вигляд:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz \approx \sum_{j=1}^{6} A_{0j} f(a_{0j}) + \sum_{j=1}^{8} C_{0j} f(c_{0j}), \qquad (2)$$

де A_s, C_s – вагові коефіцієнти, $N = 14$.

Для полінома $P_4(x,y,z) = \sum_{|\alpha|=0}^{4} a_{ijk} x^i y^j z^k$, де a_{ijk} – коефіцієнти, $\alpha = \alpha(i,j,k)$ – мультиіндекс, $|\alpha| = i + j + k$, $i,j,k = \overline{1,3}$, формула (2) є точною, тобто

$$\iiint_{\Omega} P_4(x,y,z)\,dxdydz = \sum_{s=1}^{14} G_s P_4(x_s, y_s, z_s). \qquad (3)$$

Потрійний інтеграл у лівій частині формули (3) обчислюється як

$$\iiint_{\Omega} P_4(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \frac{4}{3} a_{000} + \frac{2}{15}(a_{200} + a_{020} + a_{002}) + \frac{4}{105}(a_{400} + a_{040} + a_{004}) + \frac{2}{315}(a_{220} + a_{022} + a_{202}). \qquad (4)$$

Права частина формули (3) після підстановки координат вузлових точок має вигляд:

$$\sum_{s=1}^{14} G_s P_4(x_s, y_s, z_s) = \sum_{s=1}^{6} A_s P_6(a_s) + \sum_{s=1}^{8} C_s P_6(c_s). \qquad (5)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових коефіцієнтах a_{ijk}, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6A_1 + 8C_1 = \dfrac{4}{3}; \\ A_1 p^2 + 4C_1 r^2 = \dfrac{1}{15}; \\ A_1 p^4 + 4C_1 r^4 = \dfrac{2}{105}; \\ 4C_1 r^4 = \dfrac{1}{105}. \end{cases} \qquad (6)$$

Відмітимо, що рівновіддалені від центра октаедра вузли мають рівні вагові коефіцієнти, тобто $A_s = A_1, s = \overline{2,6}; C_s = C_1, s = \overline{2,8}.$

Система (6) має два розв'язки:

$$p_1 = \frac{1}{231}\sqrt{24255 - 231\sqrt{1785}},\ r_1 = \frac{1}{273}\sqrt{17199 + 273\sqrt{1785}},$$

$$A_s = \frac{61}{480} + \frac{1}{480}\sqrt{1785},\ s = \overline{1,6};$$

$$C_s = \frac{137}{1920} - \frac{1}{640}\sqrt{1785},\ s = \overline{1,8}; \qquad (7)$$

$$p_2 = \frac{1}{231}\sqrt{24255 + 231\sqrt{1785}}\,, r_2 = \frac{1}{273}\sqrt{17199 - 273\sqrt{1785}}\,,$$

$$A_s = \frac{61}{480} - \frac{1}{480}\sqrt{1785}\,,\ s = \overline{1,6}\,;$$

$$C_s = \frac{137}{1920} - \frac{1}{640}\sqrt{1785}\,,\ s = \overline{1,8}\,. \qquad (8)$$

Тоді формула (2) має вигляд:

$$\iiint_{\Omega} f\left(x, y, z\right) dxdydz \approx A_s \sum_{s=1}^{6} f\left(a_s\right) + C_s \sum_{s=1}^{8} f\left(c_s\right)\ , \qquad (9)$$

де вузли інтерполяції та вагові коефіцієнти відповідають формулам (7) або (8).

При цьому у випадку, коли вузлам a_s, c_s відповідають значення p_1, r_1, вузли c_s не належать області октаедра. Вагові коефіцієнти A_s, C_s приймають додатні значення незалежно від вибору координат вузлів за формулами (7) або (8).

Легко бачити, що формула (9) залишається точною для поліномів п'ятого степеня $P_5\left(x, y, z\right)$. Дійсно,

$$\iiint_{\Omega} P_5\left(x, y, z\right) dxdydz = \iiint_{\Omega} P_4\left(x, y, z\right) dxdydz + \iiint_{\Omega} \sum_{|\alpha|=5} a_{ijk} x^i y^j z^k dxdydz\,.$$

Оскільки область інтегрування в потрійному інтегралі є симетричною відносно кожної з осей координат, а степінь полінома $\sum_{|\alpha|=5} a_{ijk} x^i y^j z^k$ є непарним, маємо:

$$\iiint_{\Omega} \sum_{|\alpha|=5} a_{ijk} x^i y^j z^k dxdydz = 0\,.$$

Отже, формула (9) є точною для поліномів $P_m(x, y, z)$ степеня $m \le 5$.

Оцінимо точність отриманої формули. Будемо вважати, що функція $f(X) = f(x, y, z)$ належить класу $C^6\left(\Omega\right)$ неперервно-диференційованих до шостого порядку включно на Ω функцій. Нехай $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – довільна точка області Ω. Запишемо формулу Тейлора для $f(X)$ в околі точки X_0 із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$f\left(X\right) = \sum_{s=1}^{5} \sum_{|\beta|=s} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f\left(X_0\right)}{\partial X^{\beta}} \left(X - X_0\right)^{\beta} + \sum_{|\beta|=6} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f\left(X_0 + \theta\left(X - X_0\right)\right)}{\partial X^{\beta}} \left(X - X_0\right)^{\beta}\,, \quad (10)$$

де $\beta = \beta(i, j, k)$ – мультиіндекс, $|\beta| = i + j + k$, $i, j, k = \overline{1,3}$, $\beta! = i!\,j!\,k!$, $0 < \theta < 1$ – деяке число.

Проінтегруємо залишковий член формули (10) по області Ω:

$$R_6\left(f\right) = \iiint_{\Omega} \sum_{|\beta|=6} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f\left(X_0 + \theta\left(X - X_0\right)\right)}{\partial X^{\beta}} \left(X - X_0\right)^{\beta} dX\,, \qquad (11)$$

де $R_6\left(f\right) = \iiint_{\Omega} f\left(X\right) dX - I_R\left(f\right)$ – залишковий член формули (1), $dX = dxdydz$ – елемент об'єму.

Оцінимо рівність (11), враховуючи, що $\left|X - X_0\right| \le 2$ для довільних точок $X, X_0 \in \Omega$:

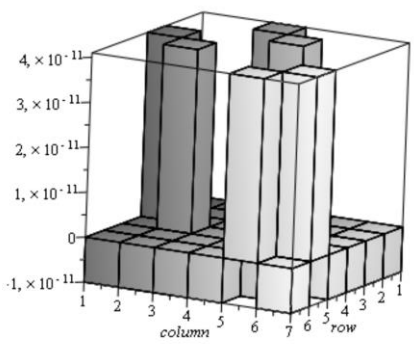
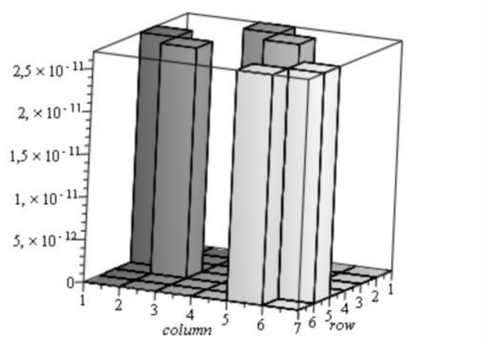
$$\left|R_6(f)\right| \le \iiint\limits_{\Omega} \sum_{|\beta|=6} \left| \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f\left(X_0 + \theta\left(X - X_0\right)\right)}{\partial X^{\beta}} \left(X - X_0\right)^{\beta} \right| dX \le$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \sum_{|\beta|=6} \left| \frac{2^{\beta}}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f\left(X_0 + \theta\left(X - X_0\right)\right)}{\partial X^{\beta}} \right| dX = K .$$

Справедливість формули (9) перевірено при обчисленні елементів матриці мас лінійного октаедра з квадратичними базисними функціями [3].

У табл.1 наведено значення похибки $\Delta = \max\limits_{m_{pq},\, p,q=\overline{1,6}} \left|R_6(f)\right|$, де $f = m_{pq}$. Розрахунки виконано у системі комп'ютерної математики Maple. Значення K відповідає $X_0 = 0$.

Таблиця 1 – Оцінка точності кубатурної формули (9)

Параметри вузлів інтерполяції	p_1, q_1, r_1	p_2, q_2, r_2
Δ	$4 \cdot 10^{-11}$	$2.7 \cdot 10^{-11}$
Розподіл похибки $\left|R_6(f)\right|$ за елементами матриці m		

Висновки. У роботі побудовано інтерполяційну кубатурну формулу по області октаедра, яка є точною для алгебраїчних поліномів п'ятого степеня та має два різних набори координат вузлів та вагових коефіцієнтів.. Отримано оцінку залишкового члена кубатурної формули для підінтегральних функцій, які належать класу $C^6(\Omega)$. Результати перевірено при обчисленні елементів локальної матриці мас для системи поліноміальних базисних функцій другого порядку лінійного октаедра. За результатами обчислень виявлено кращу за точністю кубатурну формулу, якій відповідають координати вузлів та вагові коефіцієнти формул (8). Побудована кубатурна формула може бути застосована при розв'язанні граничних задач динаміки для об'ємних областей, які дискретизовані решіткою тетраедрально-октаедральної структури.

ЛІТЕРАТУРА

1. Grosso R., Greiner G. Hierarchical Meshes for Volume Data. Computer Graphics International 1998 : Proceeding of the Conference (Washington, July 22–27, 1998). Washington, 1998. P. 761–771.

2. Greiner G., Grosso R. Hierarchical tetrahedral-octahedral subdivision for volume visualization. The Visual Computer. Berlin. 2000. Vol. 16. I. 6. P. 357–369.

3. Мотайло А.П. Геометричне моделювання скалярних та векторних полів на решітках тетраедрально-октаедральної структури: дис. канд. техн. наук: 18.10.19. Дніпро, 2019. 164 с.

4. Мотайло А.П., Білоусова Т.П. Побудова кубатурної формули для октаедра. Сучасні енергетичні установки на транспорті, технології та обладнання для їх обслуговування: матеріали 10-ї міжнародної науково-практичної конференції (Херсон, 12−13 вересня 2019 р.). Херсон, 2019. С. 277–280.
5. Мысовских И.П. О построении кубатурных формул для простейших областей. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т.4, №1. С. 3–14.
6. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. Москва, 1967. 500 с.
7. Попов А.С. Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений октаэдра. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, №1. С. 34–41.