

О возникновении вращения при косом ударе.

Ивченко В. В.

Рассматриваются особенности возникновения вращения при косом ударе шероховатого круглого тела о неподвижную плоскую поверхность. Показано существование критического угла столкновения, при котором модуль угловой скорости вращения тела максимален. При меньших, чем критический, углах имеет место качение с проскальзыванием в течение всего времени соударения, тогда как при больших углах такое проскальзывание успевает смениться за время соударения на чистое качение. Рассмотрение данной задачи будет полезно для студентов физических специальностей институтов при изучении законов динамики поступательного и вращательного движения тела.

Ключевые слова: косой удар; критический угол столкновения; качение; проскальзывание.

On the occurrence of rotation during oblique impact.

Ivchenko V. V.

The peculiarities of the occurrence of rotation of a rough round body during an oblique impact on a fixed flat surface are considered. The existence of a critical angle of collision, at which the absolute value of the angular velocity of body rotation is maximum is shown. At smaller than critical angles rolling with slippage takes place during the entire duration of the collision while at larger angles such slippage has time to change during the collision to pure rolling. Consideration of this problem will be useful for physics students when studying the laws of the dynamics of the translational and rotational motion of the body.

Key words: oblique impact; critical angle of collision; rolling; slippage.

Введение.

Как известно, материальная точка является нульмерным идеализированным объектом, то есть объектом без «внутренних» вращательных и колебательных степеней свободы. Тем не менее, в некоторых случаях эти степени свободы могут играть существенную роль. Например, вращение и колебания многоатомных молекул является важным «резервуаром» их внутренней энергии. Возбуждение этих степеней свободы может происходить в процессе столкновения. Здесь мы детально исследуем особенности возникновения вращения тела при косом ударе. Рассматриваемая задача имеет важное практическое значение в связи с возникновением эрозии поверхностей при ударах деталей машин.

Косой удар круглого тела о неподвижную плоскую поверхность.

Рассмотрим тело круглой формы (шар, диск, обруч) с массой m и радиусом r , которое до соударения с неподвижной плоской поверхностью двигалось поступательно ($\omega_0 = 0$) со скоростью \vec{v} , направленной под углом θ к нормали, проведенной в точку его падения на плоскость (рис. 1).

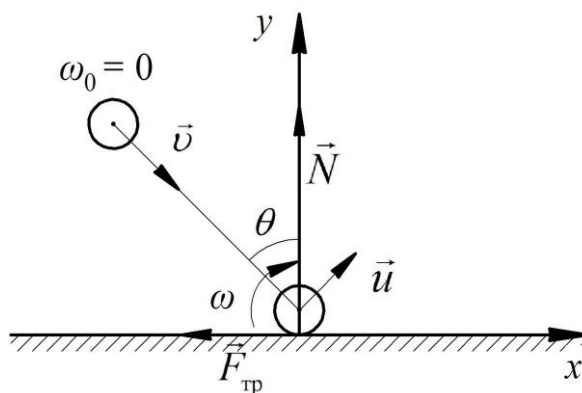


Рис. 1 Геометрия задачи

Скорость тела сразу же после соударения обозначим как \vec{u} . При решении учебных задач по физике о косом ударе обычно считается, что тангенциальные составляющие скоростей сохраняются при столкновении, то есть поверхности тел являются абсолютно гладкими. В

данной работе мы не будем пренебрегать наличием трения скольжения. В связи с этим обозначим через μ коэффициент трения скольжения тела о поверхность и введем две взаимно перпендикулярные оси координат: Ox и Oy (см. рис. 1). Для простоты будем считать, что коэффициент восстановления при ударе равен 1, то есть, что

$$u_y = v \cos \theta. \quad (1)$$

Пренебрежем также малыми силой трения качения и деформацией сдвига, имеющими место в данном случае.

Предполагая, что в течение всего времени соударения τ_0 , вдоль оси Ox имело место качение с проскальзыванием (такое движение началось с чистого скольжения, которое за счет момента силы трения стало переходить в качение), запишем законы изменения импульса и момента импульса тела:

$$m(u_y + v \cos \theta) = \int_0^{\tau_0} N(t) dt, \quad (2)$$

$$J\omega = \mu R \int_0^{\tau_0} N(t) dt, \quad (3)$$

где \vec{N} – ударная сила нормальной реакции; $J = \alpha m R^2$ – момент инерции тела (α – коэффициент, зависящий от распределения масс относительно оси вращения); ω – модуль конечной угловой скорости.

Если за время соударения τ_0 движение тела успело перейти в чистое качение (без проскальзывания) то имеют место следующие соотношения:

$$m(u_x - v \sin \theta) = -\mu \int_0^{\tau_1} N(t) dt, \quad (2)$$

$$J\omega = \mu R \int_0^{\tau_1} N(t) dt, \quad (3)$$

где $\tau_1 \leq \tau_0$ – время движения с проскальзыванием. Поскольку в течение всего времени чистого качения $\tau_0 - \tau_1$ проекция скорости движения центра масс на ось Ox не изменяется то

$$u_x = \omega R. \quad (4)$$

Пользуясь формулами (1-4) окончательно получаем:

$$\begin{cases} \omega = \frac{v}{(1+\alpha)R} \sin \theta, & \theta < \theta_{cr} \\ \omega = \frac{2\mu v}{\alpha R} \cos \theta, & \theta > \theta_{cr}. \end{cases} \quad (5)$$

Из выражения (5) следует, что существует критический угол θ_{cr} , при котором модуль угловой скорости вращения тела максимален. При $\theta < \theta_{cr}$ мы имеем дело с качением с проскальзыванием в течение всего времени соударения τ_0 , тогда как при $\theta > \theta_{cr}$ такое проскальзывание успевает смениться за время соударения на чистое качение. Значение критического угла может быть найдено из условия непрерывности функции $\omega(\theta)$ при $\theta = \theta_{cr}$: $\omega(\theta < \theta_{cr}) = \omega(\theta > \theta_{cr})$. С учетом (5) будем иметь:

$$\operatorname{tg} \theta_{cr} = 2\mu \frac{1+\alpha}{\alpha}. \quad (6)$$

Другим интересным фактом является то, что при $\theta < \theta_{cr}$ угловая скорость не зависит от коэффициента трения.

Используя выражения (5), (6), легко определить долю r первоначальной кинетической энергии тела $W_{k0} = mv^2/2$, которая запасается в виде вращательной энергии $W_{вр} = J\omega^2/2$:

$$r = \frac{W_{вр \max}}{W_{k0}} = \frac{4\mu^2\alpha(1+\alpha)^2}{\alpha^2 + 4\mu^2(1+\alpha)^2} \cdot (7)$$

На рис. 1, 2 представлены результаты численных расчетов зависимостей $\theta_{cr}(\mu)$ и $r(\mu)$ для шара ($\alpha = 2/5$). Видно, что в зависимости от значений коэффициента трения скольжения эти величины могут варьироваться в широких диапазонах $(0-80)^\circ$ и $(0-40)\%$.

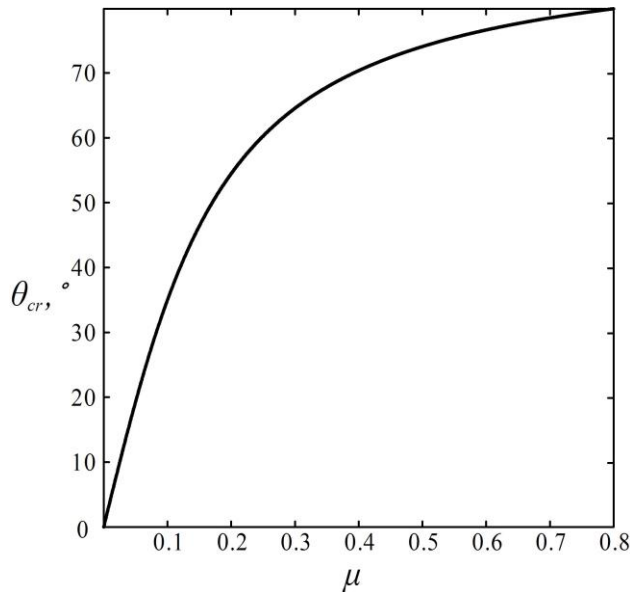


Рис. 2 Зависимость $\theta_{cr}(\mu)$ для шара

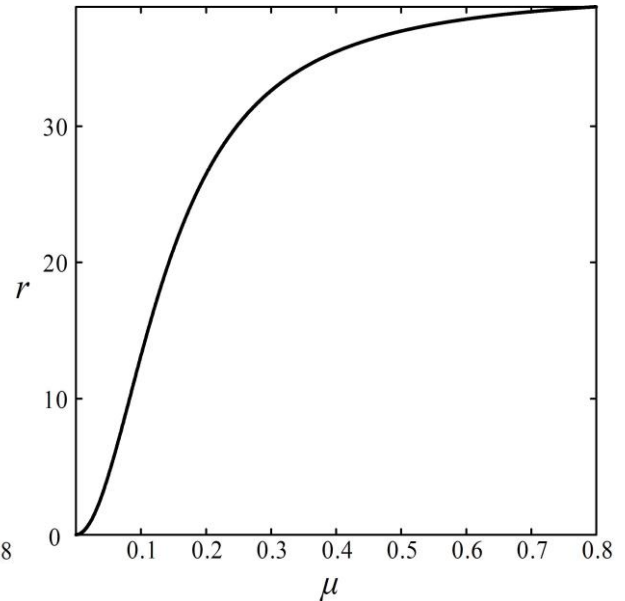


Рис. 3 Зависимость $r(\mu)$ для шара

**Ивченко Владимир Валерьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры естественно-научной подготовки, Херсонская Государственная морская академия, Херсон, Украина.
e-mail: reterty@gmail.com**