

УДК 514.74

## АПРОКСИМАЦІЯ ЕВОЛЬВЕНТНИХ КРИВИХ

*Курносенко Д.В., Савчук В.П., <sup>2</sup>Тулученко Г.Я.*

*Херсонська державна морська академія*

*<sup>2</sup>Херсонський національний технічний університет*

**Вступ.** Евольвента кола використовується для опису геометрії зубів шестерень. Ця крива за означенням є трансцендентною, тобто її рівняння в декартовій системі координат не може бути подане як алгебраїчне. Останнє обумовлює складності при обробці таких кривих у САД-системах. Тому актуальною є задача апроксимації евольвентних кривих алгебраїчними кривими або їх сполученнями, наприклад, поліномами або сплайнами [1–5].

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** У роботі [4] аналізується точність апроксимації евольвенти кола В-сплайном та кривою Безьє. Авторами визнається, що, не зважаючи на запропоновані ними модифікації традиційних алгоритмів апроксимації складеними кривим такого виду (зокрема, використовувалася нова процедура визначення відстані між кривими та розв'язувалися відповідні задачі оптимізації), не вдається зберегти опуклість заданої кривої і усунути небажані осциляції апроксимуючих кривих. Таким чином, запропоноване наближення евольвенти кола В-сплайном або кривою Безьє доцільно використовувати з демонстраційною метою.

У роботі [3] запропоновано наближувати дугу евольвенти за допомогою поліномів Бернштейна, коли вузли інтерполяції знаходяться в точках, які відповідають кореням поліномів Чебишова на відрізку  $[0; \theta_a]$ , де  $\theta$  – полярний кут точки дотику прямої до кола. Мається на увазі пряма, яка приймає участь в утворенні евольвенти і котиться без ковзання по колу;  $\theta_a$  – кут, при якому евольвента перетинає коло верхівок зубів шестерні.

Проведені авторами роботи [3] обчислювальні експерименти показують, що порівняно з методом наближення евольвенти В-сплайном за допомогою запропонованого методу досягається значне покращення точності. Ще однією перевагою запропонованого способу є зменшення коливання апроксимуючої кривої як за амплітудою, так і за частотою.

Відзначимо, що корені поліномів Чебишова знаходяться у внутрішніх точках відрізка, на якому розглядається досліджуваний поліном. Тому в кінцевих точках відрізка, на якому виконується апроксимація евольвенти, апроксимуюча крива буде відхилятися від заданої евольвенти. Це викликає складності при стикуванні кривої, яка апроксимує евольвенту, з іншими кривими, що описують повну геометрію профіля зуба шестерні.

У той же час в роботах, в яких моделюються пульсації потоку рідини, яка прокачується шестеренними насосами, наприклад, в роботі [6], використовують спрощений опис геометрії западин шестерень – без залучення перехідних кривих.

**Постановка завдання.** В такому випадку виправдано є і спрощена апроксимація евольвенти за допомогою параболи, яка проходить через кінцеві точки евольвенти.

**Основна частина.** Нехай дуга евольвента описується параметричним рівнянням:

$$\begin{cases} x(r_b; \theta) = r_b \cdot (\cos \theta + \theta \sin \theta); \\ y(r_b; \theta) = r_b \cdot (\sin \theta - \theta \cos \theta); \end{cases}$$

де  $r_b$  – радіус основного кола шестерні;  $0 \leq \theta \leq \theta_a$ ;  $\theta_a = \sqrt{\left(\frac{r_a}{r_b}\right)^2 - 1}$ ;  $r_a$  – радіус кола верхівок зубів шестерні.

Тоді початкова  $P_1$  та кінцева  $P_2$  точки дуги евольвенти мають координати:

$$P_1(r_b; 0);$$

$$P_2(x_2; y_2) = \begin{cases} x_2(r_b; \theta_a) = r_b \cdot (\cos \theta_a + \theta_a \sin \theta_a); \\ y_2(r_b; \theta_a) = r_b \cdot (\sin \theta_a - \theta_a \cos \theta_a). \end{cases}$$

Якщо апроксимуюча парабола задається традиційним рівнянням:

$$y_{parab}(x) = k_2 x^2 + k_1 x + k_0, \quad (1)$$

тоді розв'язання задачі оптимізації з цільовою функцією:

$$S(k_2; k_1; k_0) = \int_0^{\theta_a} (y(r_b; \theta) - y_{parab}(x(r_b; \theta)))^2 dx(r_b; \theta) \Rightarrow \min, \quad (2)$$

та обмеженнями:

$$\begin{aligned} y_{parab}(x(r_b; 0)) &= r_b; \\ y_{parab}(x(r_b; \theta_a)) &= y_2(r_b; \theta_a); \end{aligned} \quad (3)$$

дозволяє отримати рівняння параболи, яка з задовільною точністю наближує дугу евольвенти.

Наприклад, для шестерні з кількістю зубів  $z = 11$ , модулем  $m = 3,5$ , радіусом основного кола  $r_b \approx 16,8$  мм та радіусом кола верхівок зубів шестерні  $r_a \approx 20,92$  мм абсолютна похибка відхилення  $|y(r_b; \theta) - y_{parab}(x(r_b; \theta))|$  не перевищує 0,018 мм (рис. 1).

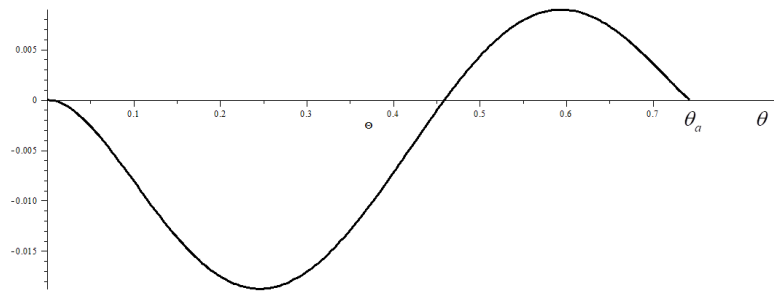


Рисунок 1 – Абсолютна похибка відхилення  $(y(r_b; \theta) - y_{parab}(x(r_b; \theta)))$  наближення дуги евольвенти параболою для досліджуваної шестерні

**Висновок.** Запропоноване наближення дуги евольвенти дугою параболи (1), рівняння якої отримується в результаті розв’язання задачі оптимізації (2–3), доцільно використовувати при створенні демонстраційних модулів руху шестерень та при наближеному моделюванні пульсацій рідини, які мають місце в шестеренних насосах. Перевагами наближення (1) є збереження характеру опуклості заданої кривої та проходження апроксимуючої параболи через кінцеві точки дуги евольвенти, що спрощує стикування з іншими кривими, які описують геометрію зуба шестерні. Для розрахунку напружено-деформованого стану зубів циліндричної зубчастої передачі в області контакту використовувати дане наближення не рекомендується.

### Література

1. Alberto López Rosado, Federico Prieto Muñoz, Roberto Alvarez Fernández. An Analytic Expression for the Inverse Involute. *Mathematical Problems in Engineering*. 2019. Vol. 2019. 9 p. DOI: 10.1155/2019/3586012
2. Gerardo Brianza Gordillo, Gonzalo González Rey. Parametric Geometric Modeling of a Spur Gear Using SolidWorks. *GearSolution*. 2017. February. P. 31–36. URL: [https://gearsolutions.com/media/uploads/uploads/assets/Digital\\_Editions/2017/201702/0217-Gearsolutions.pdf](https://gearsolutions.com/media/uploads/uploads/assets/Digital_Editions/2017/201702/0217-Gearsolutions.pdf)
3. Higuchi F., Gofuku Sh., Maekawa T., Mukundan H., Patrikalakis N. M. Approximation of Involute Curves for CAD-System Processing. *Engineering with Computers*. 2007. Vol. 23. Issue 3. P. 207–214. DOI: 10.1007/s00366-007-0060-3
4. Sobolak M., Połowniak P., Marciniak A., Jagiełowicz P. E. Approximating Curve by a Single Segment of B-Spline or Bézier Curve Directly in CAD Environment. *Advances in Manufacturing Science and Technology*. 2019. Vol. 44. Issue 3. P. 84–92. DOI: 10.2478/amst-2019-0016
5. Tengjiao Lin, H. Ou, Runfang Li. A finite Element Method for 3D Static and Dynamic Contact/Impact Analysis of Gear Drives. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*. 2007. Vol. 196. Issue 9. P. 1716–1728. DOI: 10.1016/j.cma.2006.09.014
6. Юдин Е. М. Шестеренные насосы. М.: Машиностроение, 1964. 236 с.