

<sup>1</sup>Старший викладач кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, Херсон, Україна

<sup>2</sup>Д-р ф.-м. наук, професор, завідувач кафедри прикладної та вищої математики Чорноморського державного університету імені Петра Могили, Миколаїв, Україна

<sup>3</sup>Д-р техн. наук, професор, професор кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, Херсон, Україна

## ПОБУДОВА БАЗИСУ БІПІРАМИДИ

У статті біпіраміда вперше розглядається як 6-вузловий скінченний елемент (СЕ). Для побудови її біквадратичного базису використовуються два різних підходи: матричний спосіб та метод внутрішньої конденсації базису біпіраміди як 7-вузлового СЕ. Перший підхід дозволяє дослідити принципово можливу кількість базисів, а другий такої можливості не надає, але є більш економічним. Показано, що після задоволення традиційних вимог до базисних функцій у МСЕ у біквадратичних базисних функціях біпіраміди як 6-вузлового СЕ, які будуються за допомогою названих раніше підходів, залишається різна кількість невизначених коефіцієнтів. Ці коефіцієнти надалі використовуються для надання базисним функціям спеціальних властивостей, які адаптують їх до розв'язання граничних задач із рівнянням Лапласа. У якості критерію прогностичного оцінювання апроксимаційних властивостей СЕ у формі біпіраміди обрана величина сліду матриці жорсткості. Мінімізація сліду матриці жорсткості приводить до побудови одного і того ж біквадратичного базису при обох підходах.

На основі отриманого базису аналізуються межі припустимих деформацій геометричної форми біпіраміди. Вперше теоретично доведено, що існує СЕ, при використанні якого як комірки скінченно-елементної сітки, найкраща точність досягається при відхиленні геометричної форми СЕ від правильного багатогранника, у даному випадку від октаедра. Знайдено критичне значення коефіцієнта стиснення, яке забезпечує мінімум сліду матриці жорсткості для біпіраміди з геометричною формою, що досліджується.

Проведено обчислювальний експеримент, результати якого підтверджують теоретичний прогноз властивостей біпіраміди як СЕ. Виявлені залежності дозволяють припустити доцільність застосування базисів більш високого порядку для СЕ у формі біпіраміди.

**Ключові слова:** метод скінченних елементів, біпіраміда, слід матриці жорсткості, тетрадрально-октадральна решітка.

### НОМЕНКЛАТУРА

МСЕ – метод скінченних елементів;

СЕ – скінченний елемент;

$K_i$  – вузли СЕ у формі біпіраміди,  $i = \overline{0;6}$ ;

$a, b, h$  – параметри, що визначають геометричні розміри тіла;

$p$  – коефіцієнт стиснення біпіраміди;

$(x, y, z)$  – декартові координати точки у тривимірному просторі;

$N_i$  – загальна базисна функція у формі повного поліному другого порядку від трьох змінних;

$k_j^{(i)}$  – коефіцієнти при мономах у виразах базисних функцій,  $i = \overline{1;6}$ ,  $j = \overline{1;10}$ ;

$NS$  – базис біпіраміди як 7-вузлового СЕ;

$NC$  – базис біпіраміди як 6-вузлового СЕ, отриманий в результаті застосування операції внутрішньої конденсації до базису  $NS$ ;

$NM$  – базис біпіраміди як 6-вузлового СЕ, побудований матричним способом;

$\{\alpha; \beta; \gamma\}$  – вагові коефіцієнти для операції внутрішньої конденсації;

$CoordKnots$  – матриця координат вузлів біпіраміди;

$Monom$  – вектор мононів поліному другого порядку;

$Coeff$  – матриця коефіцієнтів базисних функцій біпіраміди, які побудовані матричним способом;

$C$  – матриця жорсткості;

$Trace$  – слід матриці жорсткості;

$V$  – компактний топологічний простір;

$L_2(V)$  – середньоквадратична метрика;

$C(V)$  – метрика простору неперервних на компакт  $V$  функцій;

$\epsilon_1$  – похибка чисельного розв'язку у метриці  $L_2(V)$ ;

$\epsilon_2$  – похибка чисельного розв'язку у метриці  $C(V)$ ;

$T = T(x, y, z)$  – температура у довільній точці бруса;

$T = T(x, y, const)$  – точний розв'язок задачі;

$\hat{T} = \hat{T}(x, y, z)$  – чисельний розв'язок задачі;

$V_i$  – область окремого скінченого елемента.

### ВСТУП

Головною перевагою застосування сіток з включенням комірок у формі октаєдрів порівняно із виключно тетрадральними сітками є зменшення об'ємів розрахунків і, як наслідок, зростання швидкості реалізації МСЕ. Один 7-вузловий октаєдр замінює 8 чотиривузлових тетраєдри.

Звичайно вимога дотримання рівномірності сітки є обтяжливою при реалізації методу СЕ [1]. Тому актуальною є задача дослідження впливу відхилень форми СЕ від правильного геометричного тіла (в даному випадку від октаедра) на обчислювальні характеристики такого елемента. Особливо актуальною ця задача є для СЕ, які використовуються у приграничному шарі, коли один (або кілька) вузлів переносять на границю області для кращої апроксимації її геометрії.

Метою дослідження є встановлення умов застосування біпірамід у скінченно-елементних решітках.

### 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Для досягнення мети дослідження необхідно розв'язати низку послідовних задач, що наводяться нижче. На основі заданих координат вершин біпіраміди (рис. 1):

$$K_{1,3}(\pm a; 0; 0); K_{2,4}(0; \pm a; 0); K_5 = (0; 0; pa);$$

$$K_6 = (0; 0; -a);$$

де  $a > 0$ ,  $p > 0$ ,  $a \in R$ ,  $p \in R$ .

Необхідно знайти значення невідомих коефіцієнтів у виразах базисних функцій біпіраміди:

$$N_i = k_0^{(i)} + k_1^{(i)}x + k_2^{(i)}y + k_3^{(i)}z + k_4^{(i)}x^2 + k_5^{(i)}y^2 + k_6^{(i)}z^2 + k_7^{(i)}xy + k_8^{(i)}xz + k_9^{(i)}yz, \quad i = \overline{1; 6}, \quad (1)$$

як 6-вузлового СЕ другого порядку, за двома підходами: матричним способом ( $N_i = NM_i$ ) і з застосуванням операції внутрішньої конденсації ( $N_i = NC_i$ ).

Для цього обґрунтовано скласти перелік вимог до базисних функцій біпіраміди із відомих у МСЕ вимог до базисних функцій, який приводить до однозначного визначення коефіцієнтів базисних функцій біпіраміди.

Показати, що функція сліду матриці жорсткості біпіраміди залежить від двох аргументів  $Trace = Trace(a, p)$ , які визначають геометричну форму СЕ. Знайти мінімум функції  $Trace(a, p) \rightarrow \min$  для довільного значення аргументу  $a$  та координати точки мінімуму.

Перевірити на конкретних прикладах загальне теоретичне положення МСЕ про те, що кращими апроксимаційними властивостями володіє той базис, матриця жорсткості якого має менший слід. Оцінку точності наближеного розв'язку, отриманого МСЕ із використанням решіток з комірками у формі біпірамід та тетраєдрів, відносно точного розв'язку, отриманого методом Фур'є, здійснити використовуючи середньоквадратичну метрику  $L_2(V)$  та метрику простору неперервних на компактi  $V$  функцій  $C(V)$ .

**2 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ**

Вперше про застосування октаедра як СЕ стало відомо завдяки роботам [2, 3]. Кусково-лінійні [2] та квадратичні базисні функції [3] побудовані для вершин та точки перетину діагоналей багатогранника (тобто октаєдр розглядається як 7-вузловий СЕ). При цьому автором роботи [3] відзна-

чається, що октаєдр із квадратичним базисом є неузгодженим СЕ із 4-вузловим (лінійним) тетраєдром.

Як відомо, СЕ без внутрішніх вузлів є більш економічними у плані використання обчислювальних ресурсів при реалізації МСЕ. У роботі [4] виконано операцію внутрішньої конденсації та здійснено перехід до нового базису октаедра як 6-вузлового СЕ.

Переваги застосування октаєдрів у скінченно-елементних сітках обмежуються частинами цих сіток, де мають місце рівномірні розбиття. Тому цільною є побудова СЕ, який зберігає переваги октаедра, але може застосовуватися в нерівномірних сітках.

Досліджень щодо впливу деформацій октаедра (при його трансформації у біпіраміду) на обчислювальні характеристики такого СЕ у доступній літературі не виявлено. Таким чином, існує необхідність вивчення питання наявності у нового математичного об'єкту традиційних для МСЕ властивостей.

Для побудови базисних функцій СЕ нового виду застосуємо матричний спосіб, описаний, зокрема, у роботах [5, 7, 8], та метод внутрішньої конденсації [6]. Перший дозволяє досліджувати принципово можливу кількість базисів СЕ, що задовольняють певним вимогам. Другий є більш раціональним щодо економії обчислювальних ресурсів порівняно із попереднім способом, але обмежує різноманіття базисів СЕ серендипового типу лінійними комбінаціями базисних функцій відповідного СЕ лагранжевого типу.

Для прогнозування апроксимаційних властивостей СЕ скористаємося критерієм на основі величини сліду матриці жорсткості [8].

Критерії щодо величини припустимих відхилень геометрії СЕ від правильної форми багатокутників або багатогранників описані у роботах [9–10].

**3 МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ**

**Побудова базису біпіраміди як 7-вузлового СЕ.** Виведемо рівняння базисних функцій біпіраміди як для СЕ з 7 вузлами. Будемо розглядати 8-гранну біпіраміду, в якій відрізок  $K_0K_5$  (рис. 1) може бути довільної довжини:

$$K_0K_5 = p \cdot a = b, \text{ де } p > 0 \text{ і } p \in R.$$

Побудова перших шести базисних функцій є очевидною із традиційної для МСЕ вимоги рівності базисної функції в своєму вузлу одиниці і нулю – в усіх інших вузлах [5]:

$$NS_{1,3} = \frac{1}{2a^2} x(x \pm a); \quad NS_{2,4} = \frac{1}{2a^2} y(y \pm a);$$

$$NS_5 = \frac{1}{b(a+b)} z(z+a); \quad NS_6 = \frac{1}{a(a+b)} z(z-b). \quad (2)$$

Вираз останньої базисної функції біпіраміди у вузлу  $K_0$  знайдемо із умови рівності одиниці суми всіх базисних функцій [5]:

$$NS_0 = 1 - \sum_{i=1}^6 NS_i, \text{ де } i = \overline{1; 6}. \quad (3)$$

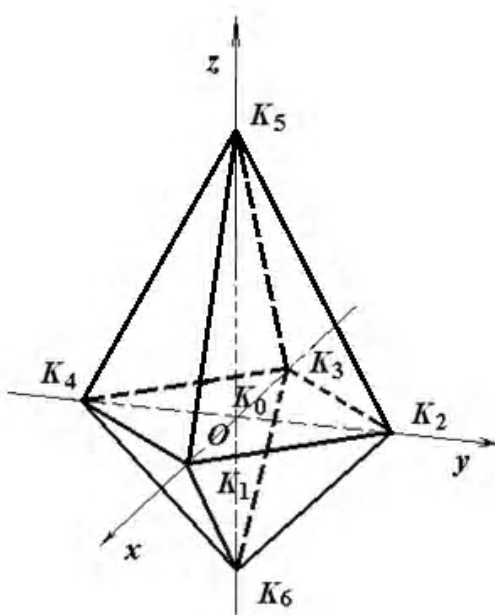


Рисунок 1 – Біпіраміда як СЕ

Із (3), з урахуванням (2), маємо

$$NS_0 = 1 - \frac{1}{pa^2} \left( p \cdot (x^2 + y^2) + z^2 - a(p-1)z \right) \text{ або}$$

$$NS_0 = \frac{(p+1)^2}{4p} \cdot F, \quad (4)$$

$$\text{де } F = 1 - \frac{(x^2 + y^2)}{\frac{1}{p} \cdot a^2 \cdot \frac{(p+1)^2}{4}} - \frac{(z - z_0)^2}{a^2 \cdot \frac{(p+1)^2}{4}}.$$

Із виразу (4) видно, що поверхні рівня базисної функції  $NS_0$  є еліпсоїдами зі зміщеними по осі  $Oz$  центрами, якщо початок системи координат пов'язувати із вузлом  $K_0$ .

**Побудова узагальненого базису біпіраміди шляхом внутрішньої конденсації.** Розподілимо внесок базисної функції  $NS_0$  (4), яка асоційована з внутрішнім вузлом  $K_0$ , між базисними функціями, які асоційовані із зовнішніми вузлами, тобто здійснимо операцію внутрішньої конденсації [6]:

$$NC_i = NS_i + \alpha \cdot NS_0, \quad i = 1..4;$$

$$NC_5 = NS_5 + \beta \cdot NS_0, \quad NC_6 = NS_6 + \gamma \cdot NS_0, \quad (5)$$

де  $4\alpha + \beta + \gamma = 1$ ;  $0 \leq \alpha \leq 0,25$ .

Вимоги рівності базисної функції в своєму вузлу одиниці і нулю – в усіх інших вузлах і вимога рівності суми базисних функцій одиниці для функцій (5) виконуються автоматично [6]. Перевірка виконання вимоги повноти базису (5) [7]:

$$x = \sum_{i=1}^6 x_i \cdot NC_i(x, y, z); \quad y = \sum_{i=1}^6 y_i \cdot NC_i(x, y, z);$$

$$z = \sum_{i=1}^6 z_i \cdot NC_i(x, y, z); \quad (6)$$

де  $(x_i; y_i; z_i)$  – координати вузлів біпіраміди:  $NC_i(x, y, z)$  – базисні функції біпіраміди після операції внутрішньої конденсації, – показує, що для виконання останніх рівностей необхідно ввести додаткові співвідношення між значеннями вагових коефіцієнтів:

$$\beta = \frac{1-4\alpha}{p+1}; \quad \gamma = \frac{p}{p+1} \cdot (1-4\alpha). \quad (7)$$

Враховуючи інтервал зміни вагового коефіцієнта  $\alpha$ :  $0 \leq \alpha \leq 0,25$ , маємо такі обмеження для коефіцієнта  $\beta$ :  $0 \leq \beta \leq 1/(p+1)$  та  $\gamma$ :  $0 \leq \gamma \leq p/(p+1)$ .

Отже, базисні функції конденсованого базису визначаються за формулами (5) і (7).

Очевидно, що після задоволення усіх традиційних вимог до базисних функцій у МСЕ залишається невизначеним один параметр  $\alpha$ . Ним можна скористатися для надання базису спеціальних властивостей.

**Побудова узагальненого базису біпіраміди матричним способом.** Оскільки метод внутрішньої конденсації працює виключно із базисними функціями, які попередньо визначені для елемента з внутрішнім вузлом, тому доцільно перевірити існування інших базисів біпіраміди з квадратичними функціями.

Матриця координат вузлів біпіраміди (рис. 1) має вигляд:

$$CoordKnots = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & pa \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Базисні функції будемо шукати у вигляді поліномів другого степеню (1).

Вектор мономів такого поліному має вигляд:

$$Monom = (1; x; y; z; x^2; y^2; z^2; xy; xz; yz).$$

Із коефіцієнтів всіх базисних функцій утворимо матрицю коефіцієнтів:

$$Coeff = \begin{pmatrix} k_0^{(1)} & k_1^{(1)} & k_2^{(1)} & \dots & k_9^{(1)} \\ k_0^{(2)} & k_1^{(2)} & k_2^{(2)} & \dots & k_9^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_0^{(6)} & k_1^{(6)} & k_2^{(6)} & \dots & k_9^{(6)} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

За введених позначень вектор базисних функцій знаходиться за формулою:

$$NM = Coeff \cdot Monom^T.$$

Врахуємо наявні симетрії у біпіраміді. Біпіраміда є симетричною відносно площини  $y=0$ , тому базисні функції  $NM_1$  і  $NM_3$  повинні бути парними за змінною  $y$ , тобто не містити доданків із змінною  $y$  у непарних степенях. Це означає, що дорівнюють нулю такі коефіцієнти:

$$k_2^{(1)} = k_7^{(1)} = k_9^{(1)} = 0 \quad \text{і} \quad k_2^{(3)} = k_7^{(3)} = k_9^{(3)} = 0.$$

Аналогічно через симетричність біпіраміди відносно площини  $x=0$  у виразах базисних функцій  $NM_2$  і  $NM_4$  дорівнюють нулю такі коефіцієнти:

$$k_1^{(2)} = k_7^{(2)} = k_8^{(2)} = 0 \quad \text{і} \quad k_1^{(4)} = k_7^{(4)} = k_8^{(4)} = 0.$$

Симетричність біпіраміди відносно тих же площин у рівняннях базисних функцій  $NM_5$  і  $NM_6$  приводить до рівності нулю коефіцієнтів:

$$k_1^{(5)} = k_2^{(5)} = k_7^{(5)} = k_8^{(5)} = k_9^{(5)} = 0$$

$$\text{і} \quad k_1^{(6)} = k_2^{(6)} = k_7^{(6)} = k_8^{(6)} = k_9^{(6)} = 0.$$

Таким чином матриця коефіцієнтів базисних функцій (8) набуває вигляду:

$$Coeff = \begin{pmatrix} k_0^{(1)} & k_1^{(1)} & 0 & k_3^{(1)} & k_4^{(1)} & k_5^{(1)} & k_6^{(1)} & 0 & k_8^{(1)} & 0 \\ k_0^{(2)} & 0 & k_2^{(2)} & k_3^{(2)} & k_4^{(2)} & k_5^{(2)} & k_6^{(2)} & 0 & 0 & k_9^{(2)} \\ k_0^{(3)} & k_1^{(3)} & 0 & k_3^{(3)} & k_4^{(3)} & k_5^{(3)} & k_6^{(3)} & 0 & k_8^{(3)} & 0 \\ k_0^{(4)} & 0 & k_2^{(4)} & k_3^{(4)} & k_4^{(4)} & k_5^{(4)} & k_6^{(4)} & 0 & 0 & k_9^{(4)} \\ k_0^{(5)} & 0 & 0 & k_3^{(5)} & k_4^{(5)} & k_5^{(5)} & k_6^{(5)} & 0 & 0 & 0 \\ k_0^{(6)} & 0 & 0 & k_3^{(6)} & k_4^{(6)} & k_5^{(6)} & k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вимога рівності одиниці базисної функції у своєму вузлу і нулю в усіх інших вузлах приводить до 6 систем рівнянь, які в матричному вигляді записуються так:

$$Coeff(i, 1..10) \cdot Monom\_in\_Knots^T = E(i, 1..6), \quad (9)$$

де  $i = \overline{1;6}$ ;  $E$  – одинична матриця розміром  $6 \times 6$ .

Матриця значень мономів у вузлових точках має вигляд:

$$Monom\_in\_Knots = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & pa & 0 & 0 & p^2a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Всі шість систем (9) є сумісними, але невизначеними, тому з них можемо однозначно знайти тільки частину значень коефіцієнтів:

$$\overline{Coeff} = \begin{pmatrix} -a^2pk_6^{(1)} & \frac{1}{2a} & 0 & a(1-p)k_6^{(1)} & pk_6^{(1)} + \frac{1}{2a^2} & pk_6^{(1)} & k_6^{(1)} & 0 & k_8^{(1)} & 0 \\ -a^2pk_6^{(2)} & 0 & \frac{1}{2a} & a(1-p)k_6^{(2)} & pk_6^{(2)} & pk_6^{(2)} + \frac{1}{2a^2} & k_6^{(2)} & 0 & 0 & k_9^{(2)} \\ -a^2pk_6^{(3)} & -\frac{1}{2a} & 0 & a(1-p)k_6^{(3)} & pk_6^{(3)} + \frac{1}{2a^2} & pk_6^{(3)} & k_6^{(3)} & 0 & k_8^{(3)} & 0 \\ -a^2pk_6^{(4)} & 0 & -\frac{1}{2a} & a(1-p)k_6^{(4)} & pk_6^{(4)} & pk_6^{(4)} + \frac{1}{2a^2} & k_6^{(4)} & 0 & 0 & k_9^{(4)} \\ -a^2pk_6^{(5)} + \frac{1}{p+1} & 0 & 0 & a(1-p)k_6^{(5)} + \frac{1}{a(p+1)} & pk_6^{(5)} - \frac{1}{a^2(p+1)} & pk_6^{(5)} - \frac{1}{a^2(p+1)} & k_6^{(5)} & 0 & 0 & 0 \\ -a^2pk_6^{(6)} + \frac{p}{p+1} & 0 & 0 & a(1-p)k_6^{(6)} - \frac{1}{a(p+1)} & pk_6^{(6)} - \frac{p}{a^2(p+1)} & pk_6^{(6)} - \frac{p}{a^2(p+1)} & k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Врахуємо вимогу повноти базису (6). Напишемо тепер її у матричному вигляді:

$$CoordKnots^T \cdot \overline{Coeff} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Добуток матриць  $CoordKnots^T \cdot \overline{Coeff}$  дорівнює:

$$CoordKnots^T \cdot \overline{Coeff} = \begin{pmatrix} a^3p(k_6^{(3)} - k_6^{(1)}) & 1 & 0 & a^2(1-p)(k_6^{(1)} - k_6^{(3)}) & ap(k_6^{(1)} - k_6^{(3)}) & ap(k_6^{(1)} - k_6^{(3)}) & ap(k_6^{(1)} - k_6^{(3)}) & 0 & a(k_8^{(1)} - k_8^{(3)}) & 0 \\ a^3p(k_6^{(4)} - k_6^{(2)}) & 0 & 1 & a^2(1-p)(k_6^{(2)} - k_6^{(4)}) & ap(k_6^{(2)} - k_6^{(4)})=0 & ap(k_6^{(2)} - k_6^{(4)})=0 & ap(k_6^{(2)} - k_6^{(4)})=0 & 0 & 0 & a(k_9^{(2)} - k_9^{(4)}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a(k_6^{(6)} - pk_6^{(5)}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Тотожність (10) із врахуванням виразу її правої частини (11) приводить до трьох узгоджених систем рівнянь, із яких знаходимо:

$$\left. \begin{matrix} k_6^{(1)} = k_6^{(3)} \\ k_8^{(1)} = k_8^{(3)} \end{matrix} \right\}, \quad \left. \begin{matrix} k_6^{(2)} = k_6^{(4)} \\ k_9^{(2)} = k_9^{(4)} \end{matrix} \right\}; \quad k_6^{(5)} = \frac{1}{p}k_6^{(6)}. \quad (12)$$

Після врахування розв'язків (12) систем (10–11) матриця  $\overline{Coeff}$  набуває вигляду:

$$\overline{Coeff} = \begin{pmatrix} -a^2 pk_6^{(3)} & \frac{1}{2a} & 0 & a(1-p)k_6^{(3)} & pk_6^{(3)} + \frac{1}{2a^2} & pk_6^{(3)} & k_6^{(3)} & 0 & k_8^{(3)} & 0 \\ -a^2 pk_6^{(4)} & 0 & \frac{1}{2a} & a(1-p)k_6^{(4)} & pk_6^{(4)} & pk_6^{(4)} + \frac{1}{2a^2} & k_6^{(4)} & 0 & 0 & k_9^{(4)} \\ -a^2 pk_6^{(3)} & -\frac{1}{2a} & 0 & a(1-p)k_6^{(3)} & pk_6^{(3)} + \frac{1}{2a^2} & pk_6^{(3)} & k_6^{(3)} & 0 & k_8^{(3)} & 0 \\ -a^2 pk_6^{(4)} & 0 & -\frac{1}{2a} & a(1-p)k_6^{(4)} & pk_6^{(4)} & pk_6^{(4)} + \frac{1}{2a^2} & k_6^{(4)} & 0 & 0 & k_9^{(4)} \\ -a^2 pk_6^{(6)} + \frac{1}{p+1} & 0 & 0 & a(1-p)k_6^{(6)} + \frac{1}{a(p+1)} & pk_6^{(6)} - \frac{1}{a^2(p+1)} & pk_6^{(6)} - \frac{1}{a^2(p+1)} & \frac{1}{p} k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 pk_6^{(6)} + \frac{p}{p+1} & 0 & 0 & a(1-p)k_6^{(6)} - \frac{1}{a(p+1)} & pk_6^{(6)} - \frac{p}{a^2(p+1)} & pk_6^{(6)} - \frac{p}{a^2(p+1)} & k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Знайдемо частину коефіцієнтів із умови, що сума всіх базисних функцій дорівнює 1. Для цього знайдемо суми елементів матриці (13) по стовпцям:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^6 NM_i = 1 \Rightarrow & \left. \begin{aligned} k_6^{(3)} &= -k_6^{(4)} - \frac{p+1}{2p} k_6^{(6)} \\ k_8^{(3)} &= 0 \\ k_9^{(4)} &= 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Матриця (13) набуває нового вигляду з додатковими вимогами (14):

$$\overline{Coeff} = \begin{pmatrix} a^2 \cdot \left( k_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) & \frac{1}{2a} & 0 & a \cdot \frac{p-1}{p} \cdot \left( pk_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) & -\left( k_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) + \frac{1}{2a^2} & -\left( k_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) & -k_6^{(4)} - \frac{p+1}{2p} k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 pk_6^{(4)} & 0 & \frac{1}{2a} & a(1-p)k_6^{(4)} & pk_6^{(4)} & pk_6^{(4)} + \frac{1}{2a^2} & k_6^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ a^2 \cdot \left( pk_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) & -\frac{1}{2a} & 0 & a \cdot \frac{p-1}{p} \cdot \left( pk_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) & -\left( k_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) + \frac{1}{2a^2} & -\left( k_6^{(4)} + \frac{p+1}{2} k_6^{(6)} \right) & -k_6^{(4)} - \frac{p+1}{2p} k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 pk_6^{(4)} & 0 & -\frac{1}{2a} & a(1-p)k_6^{(4)} & pk_6^{(4)} & pk_6^{(4)} + \frac{1}{2a^2} & k_6^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 k_6^{(6)} + \frac{1}{p+1} & 0 & 0 & a(1-p)k_6^{(6)} + \frac{1}{a(p+1)} & k_6^{(6)} - \frac{1}{a^2(p+1)} & k_6^{(6)} - \frac{1}{a^2(p+1)} & \frac{1}{p} k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 pk_6^{(6)} + \frac{p}{p+1} & 0 & 0 & a(1-p)k_6^{(6)} - \frac{1}{a(p+1)} & pk_6^{(6)} - \frac{p}{a^2(p+1)} & pk_6^{(6)} - \frac{p}{a^2(p+1)} & k_6^{(6)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, з урахуванням всіх вимог, базисні функції біпіраміди знаходяться за формулою:

$$NM = \overline{Coeff} \cdot Monom^T. \quad (15)$$

Таким чином, невідомими залишаються значення двох коефіцієнтів  $k_6^{(4)}$  і  $k_6^{(6)}$ , які можна визначити, використовуючи специфічні вимоги до базисних функцій.

**Побудова базисів біпіраміди із мінімальним слідом матриці жорсткості.** У загальному випадку для набору базисних функцій  $\{N_i\}$  слід матриці жорсткості  $C$  з однічною матрицею коефіцієнтів пружності [5] обчислюється за формулою:

$$Trace = \sum_{i=1}^6 \iiint_V \left( \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_i}{\partial z} \right)^2 \right) dV. \quad (16)$$

**Мінімізація сліду матриці жорсткості для базису біпіраміди, який отримано матричним способом.** Підставимо базисні функції (15) у формулу (16). Отримана функція сліду

матриці жорсткості є функцією двох незалежних змінних  $k_6^{(4)}$  і

$k_6^{(6)}$ :  $Trace = Trace(k_6^{(4)}; k_6^{(6)})$ . За своєю структурою вона може мати тільки мінімум, тому за необхідною умовою існування екстремуму функції двох змінних знаходимо, що [8]:

$$\begin{aligned} k_6^{(4)} &= -\frac{1}{4a^2} \cdot \frac{10p^3 - p^2 + 20p - 5}{15p^4 + p^3 + 18p^2 - 3p + 5}; \\ k_6^{(6)} &= \frac{p}{a^2} \cdot \frac{10p^3 - p^2 + 20p - 5}{15p^5 + 16p^4 + 19p^3 + 15p^2 + 2p + 5}. \end{aligned} \quad (17)$$

А мінімально можливий слід матриці жорсткості залежить від параметра видовження  $p$  за формулою:

$$Trace = \frac{a}{15} \cdot \frac{230p^6 + 462p^5 + 653p^4 + 620p^3 + 372p^2 + 214p + 185}{(p+1)(5p^2 + 2p + 5)(3p^2 - p + 1)}. \quad (18)$$

**Мінімізація сліду матриці жорсткості для базису біпіраміди, який отримано шляхом внутрішньої конденсації.** Підставимо базисні функції (4, 6) у формулу (16). Отримана функція сліду матриці жорсткості є функцією однієї незалежної змінної  $\alpha$ :  $Trace = Trace(\alpha)$ . Також із необхідної умови існування екстремуму функції однієї змінної знаходимо значення  $\alpha$  та інших вагових коефіцієнтів за формулами (7):

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{p}{4} \cdot \frac{10p^3 - p^2 + 20p - 5}{(5p^2 + 2p + 5)(3p^2 - p + 1)} \\ \beta &= \frac{5p^4 + 2p^3 - 2p^2 + 2p + 5}{(p+1)(5p^2 + 2p + 5)(3p^2 - p + 1)} \\ \gamma &= \frac{p}{p+1} \cdot \frac{5p^4 + 2p^3 - 2p^2 + 2p + 5}{(5p^2 + 2p + 5)(3p^2 - p + 1)} \end{aligned} \right\} (19)$$

Обчислення сліду матриці жорсткості за формулою (16) із базисними функціями (4) і ваговими коефіцієнтами (19) приводять до виразу, який співпадає із виразом (18) сліду матриці жорсткості для базису, що побудований матричним способом (15, 17).

Дослідження на екстремум функції сліду матриці жорсткості (теплопровідності) для біпіраміди (18) показують, що мінімум досягається при  $p \approx 0,7584$ , і складає приблизно 2,4776. Перевіримо ефективність застосування отриманого значення параметру  $p$  стиснення біпіраміди при розв'язанні методом скінчених елементів задачі теорії поля.

**4 ЕКСПЕРИМЕНТИ**

Розглянемо прямокутний брус  $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq h\}$ , де  $a, b, h > 0$ , який виготовлено з ізотропного матеріалу. Одна з його граней підтримується при температурі  $T = f(y)$ , решта граней – при температурі  $T = 0$ .

Стационарний розподіл температури задовольняє рівняння Лапласа:

$$\Delta T = 0, \tag{20}$$

де  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  – оператор Лапласа,

$T = T(x, y, z)$  – температура у довільній точці бруса  $V$ , з граничними умовами Діріхле:

$$\left. \begin{aligned} T|_{x=0} = T|_{y=0} = T|_{y=b} = T|_{z=0} = T|_{z=h} = 0, \\ T|_{x=a} = f(y). \end{aligned} \right\} (21)$$

Аналитичний розв'язок задачі (20–21), отриманий у роботі [11], порівняємо із чисельним, знайденим методом скінчених елементів із використанням решіток тетрадральної та тетрадрально-октадральної структур [12].

**5 РЕЗУЛЬТАТИ**

У табл. 1 представлені розрахунки похибки чисельного розв'язку по області бруса  $V$  лінійних розмірів

Таблиця 1 – Похибка обчислювального експерименту

Похибка по області бруса $V$	Структура скінченно-елементної решітки			
	Тetraдрально-октадральна			Тetraдральна
	Базисні функції біпіраміди (4), (6)		Кусково-лінійні базисні функції октаедра [12]	
$p = 1$	$p = 0,7584$			
$\varepsilon_1$	0,73	0,69	0,73	0,48
$\varepsilon_2$	3,27	3,42	3,27	3,75

$a = b = 1, h = 2$  при заданій температурі  $f(y) = t_0 y(b - y)$ , де  $t_0 = 20$  у середньоквадратичному:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (T(x, y, const) - \hat{T}_i(x, y, z))^2}$$

та у метриці простору неперервних на компактi  $V$  функцій  $C(V)$ :

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \max_{(x, y, z) \in V_i} (T(x, y, const) - \hat{T}(x, y, z))^2},$$

де  $T = T(x, y, const)$  і  $\hat{T} = \hat{T}(x, y, z)$  – точний та чисельний розв'язки задачі,  $V_i$  – область скінченного елемента

$$\left( V = \bigcup_{i=1}^n V_i \right), n - \text{кількість скінчених елементів.}$$

При цьому у ансамблі із лінійним тетраедром [7] тестувалися базисні функції октаедра (біпіраміди), задані формулами (5), (7) для  $p = 1$  та  $p = 0,7584$ , а також кусково-лінійні функції [12].

**6 ОБГОВОРЕННЯ**

Аналізуючи результати чисельного експерименту, слід відмітити, що використання біпіраміди із коефіцієнтом видовження  $p = 0,7584$  у ансамблі із лінійним тетраедром є ефективним за точністю обчислень порівняно з аналогічною за структурою решіткою із комірками у формі октаедрів при  $p = 1$ . При цьому неузгодженість [7] скінчених елементів різної топології виявляється більш слабким критерієм вибору базисних функцій, ніж мінімальний слід матриці теплопровідності (жорсткості). Найменша (у даному експерименті) похибка у середньоквадратичному отримана при використанні тетрадральної решітки за рахунок більш дрібних комірок та потребує більшого часу для реалізації програмного модуля, створеного безпосередньо авторами статті. В свою чергу, розрахунок похибки у метриці простору  $C(V)$  вказує на перевагу використання альтернативної решітки у МСЕ із використанням октаедрів при  $p = 1$ . Також відзначимо, що значення

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \max_{(x, y, z) \in V_i} (T(x, y, const) - \hat{T}(x, y, z))^2}$$

досягаються на гранях скінчених елементів незалежно від структури решітки. Останнє означає, що може бути доцільним побудова базису біпіраміди більш високого порядку.

Таким чином, нами вперше знайдено СЕ, для якого найкраща (у середньо-квадратичному сенсі) точність прогнозується при відсутності правильної геометричної форми.

У програмних продуктах, що реалізують МСЕ (зокрема, у ANSYS) для характеристики комірок сітки використовують показник асиметрії Skewness, який розраховується із міркувань обрання за еталон СЕ правильної геометричної форми [9, 10]. Для обчислень з високими вимогами до точності отримуваних розв'язків традиційно вважають припустимими відхилення у межах  $\pm 0,1$  від об'єму правильного геометричного тіла, при невисоких вимогах до точності розв'язків вважають припустимими відхилення у межах  $\pm 0,25$  від того ж об'єму.

Тоді по аналогії із традиційними рекомендаціями на практиці слід використовувати біпіраміди з коефіцієнтом видовження  $0,51 \leq p \leq 1,01$  при невисоких вимогах до точності отримуваних розв'язків і  $0,66 \leq p \leq 0,86$  – при високих вимогах до точності отримуваних розв'язків.

## ВИСНОВКИ

У роботі вперше узагальнено СЕ у формі октаедра до СЕ більш довільної геометричної форми, а саме, біпіраміди, що дозволяє використовувати новий СЕ у частинах сітки, де відбувається згущення комірок, або у приграничній зоні. Це дозволяє розширити можливості практичного застосування СЕ у формі біпіраміди у скінченно-елементних сітках порівняно із обмеженнями застосування СЕ у формі октаедра виключно в рівномірних сітках.

Для нового СЕ у формі біпіраміди вперше обґрунтовано перелік вимог до базисних функцій, який забезпечує їх однозначне визначення. Показано, що залучення традиційних вимог до базисних функцій, при побудові базисів біпіраміди за двома підходами: матричним способом і методом внутрішньої конденсації, не дозволяє остаточно визначити значення всіх коефіцієнтів, які входять до їх складу. Це дозволяє надавати базисам біпіраміди додаткових доцільних у МСЕ властивостей.

Вперше показано, що при залученні вимоги мінімізації сліду матриці жорсткості, базиси біпіраміди, які побудовані за двома вказаними вище підходами, співпадають. Це дозволяє рекомендувати метод внутрішньої конденсації як більш доцільний для практичного використання із міркувань економії обчислювальних ресурсів.

Авторами вперше у теорії МСЕ знайдено елемент у формі біпіраміди, якому за величиною сліду матриці жорсткості прогноуються кращі апроксимаційні властивості не при правильній геометричній формі (октаедра), а при відхиленні від неї. У роботі вперше теоретично розраховані припустимі відхилення біпіраміди від форми октаедра. Вони виявилися несподіваними і такими, що не відповідають традиційним уявленням про умови досягнення найкращої точності на різних сітках СЕ. Знайдені межі зміни параметра стиснення біпіраміди дозволяють будувати скінченно-елементні сітки із включен-

ням комірок у формі біпірамід із задовільними обчислювальними властивостями.

Результати обчислювального експерименту із використанням решіток на основі досліджуваного елемента підтверджують ефективність застосування біпірамід із критичним значенням коефіцієнту стиснення. Очевидно, що отриманий СЕ заслуговує більш широкого застосування у практиці МСЕ.

## ПОДЯКИ

Дослідження виконанні у відповідності до пріоритетного напрямку розвитку науки і техніки в Україні на період до 2020 року: «Інформаційні та комунікаційні технології» за темами: «Геометричне моделювання на дискретних елементах правильної просторової форми» (номер державної реєстрації 0111U007990) та «Розробка методів комп'ютерного дослідження математичних моделей фізичних полів» (номер державної реєстрації 0111U007951). Фінансування здійснюється за рахунок особистих коштів виконавців.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алгоритм построения трехмерной адаптированной сетки для задач аэродинамики, решаемых методом конечных элементов / [Ю. А. Крашаница, А. В. Бахир, В. А. Тараненко, Ю. С. Машенко] // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2014. – № 66. – С. 105–110.
2. Greiner G. Hierarchical tetrahedral-octahedral subdivision for volume visualization / G. Greiner, R. Grosso // The Visual Computer. – 2000. – Т. 16. – Р. 357–369.
3. de Bruijn H. Numerical Method for 3D Ideal Flow [Electronic resource] / Han de Bruijn – Access mode: <http://hdebruijn.soo.dto.tudelft.nl/jaar2010/octaeder.pdf>.
4. Мотайло А. П. Базисы шестиузлового октаэдра [Электронный ресурс] / А. П. Мотайло. – Материалы международной научно-практической конференции «Перспективные научные исследования – 2011». Серия: Математика: Прикладная математика (17–25 февраля 2011 г.). – София, Болгария. – Режим доступа: [http://www.rusnauka.com/Page\\_ru.htm](http://www.rusnauka.com/Page_ru.htm).
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
6. Шопов П. Й. Метод конденсации для задач механики несжимаемых флюидов / П. Й. Шопов // Сердика: Българско математическо списание. – 1984. – Т. 10. – С. 198–205.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
8. Секулович М. Метод конечных элементов / М. Секулович. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
9. Checking the Skewness // ANSYS Icepak 12.1: User's Guide [Electronic resource]. – Access data: <http://orange.engr.ucdavis.edu/Documentation12.1/121/ICEPAK/iceug.pdf>
10. ANSYS Fluent. [Electronic resource]. – Access data: <https://www.sharcnet.ca/Software/Fluent6/html/udf/node1.htm>
11. Несис Е. И. Методы математической физики / Е. И. Несис. – М.: Просвещение, 1977. – 199 с.
12. Мотайло А. П. О численном решении стационарной задачи теплопроводности методом конечных элементов на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры / А. П. Мотайло // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2014. – №25(196), Вып. 37. – Белгород: «НИУ БелГУ», 2014. – С. 119–127.

Стаття надійшла до редакції 29.06.2016.  
Після доробки 04.07.2016.

Мотайло А. П.<sup>1</sup>, Хомченко А. Н.<sup>2</sup>, Тулученко Г. Я.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Старший преподаватель кафедры высшей математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета, Херсон, Украина

<sup>2</sup>Д-р ф.-м. наук, профессор, заведующий кафедры прикладной и высшей математики Черноморского государственного университета имени Петра Могилы, Николаев, Украина

<sup>3</sup>Д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры высшей математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета, Херсон, Украина

#### ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА БИПИРАМИДЫ

В статье бипирамида впервые рассматривается как 6-узловой конечный элемент (КЭ). Для построения ее биквадратичного базиса используются два разных подхода: матричный способ и метод внутренней конденсации базиса бипирамиды как 7-узловой лагранжевого КЭ. Первый подход позволяет исследовать принципиально возможное количество базисов КЭ, а второй такой возможности не предоставляет, но является более экономичным. Показано, что после удовлетворения традиционных требований к базисным функциям в МКЭ в биквадратичных базисных функциях бипирамиды как 6-узловой КЭ, которые строятся с помощью названных ранее подходов, остается разное количество неопределенных коэффициентов. Эти коэффициенты далее используются для придания базисным функциям специальных свойств, адаптирующих их к решению граничных задач с уравнением Лапласа. В качестве критерия прогностического оценивания аппроксимационных свойств КЭ в форме бипирамиды выбрана величина следа матрицы жесткости. Минимизация следа матрицы жесткости приводит к построению одного и того же биквадратичного базиса бипирамиды при обоих подходах.

На основе полученного базиса анализируются границы допустимых деформаций геометрической формы бипирамиды. Впервые теоретически доказано, что существует КЭ, при использовании которого в качестве ячейки конечно-элементной сетки, наилучшая точность достигается при отклонении геометрической формы КЭ от правильного многогранника, в данном случае от октаэдра. Найдено критическое значение коэффициента сжатия, которое обеспечивает достижение минимума следа матрицы жесткости для бипирамиды исследуемой геометрической формы.

Проведен вычислительный эксперимент, результаты которого подтверждают теоретический прогноз свойств бипирамиды как КЭ. Установленные закономерности позволяют предполагать целесообразность применения базисов более высокого порядка для КЭ в форме бипирамиды.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, бипирамида, след матрицы жесткости, тетраэдрально-октаэдральная решетка.

Motailo A. P.<sup>1</sup>, Khomchenko A. N.<sup>2</sup>, Tuluchenko G. Ya.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Senior Lecturer in Chair of Higher Mathematics and Mathematical Modeling, Kherson National Technical University, Kherson, Ukraine

<sup>2</sup>Dr. Sc., Professor, Head of Chair, Applied and Higher Mathematics, Petro Mohyla Black Sea State University, Mykolayiv, Ukraine

<sup>3</sup>Dr. Sc., Professor, Professor of Chair of Higher Mathematics and Mathematical Modeling, Kherson National Technical University, Kherson, Ukraine

#### THE CONSTRUCTING OF BIPYRAMID'S BASIS

The bipyramid for the first time is considered as a 6-knots finite element (FE) in the article. For the construction of her biquadratic base two different approaches are used: matrix method and internal condensation method for the bipyramid's base as a 7-knots Lagrange FE. The first approach allows to investigate the fundamentally possible amount of bases for FE, and second approach does not give such possibility, but it is more economical. It is shown that after satisfaction of the traditional requirements to the basic functions in FEM in the biquadratic basic functions of bipyramid as a 6-knots FE, which are built by means of the named before approaches, there are a different amount of the indefinite coefficients. These coefficients are used future for the giving of the special properties to the basic functions, which adapt them to the solving of a boundary problems with Laplace's equation. The value of trace of stiffness matrix is chosen as a criterion for the prognostic evaluation of approximation properties of FE in bipyramid's form. The minimization of the trace value of the stiffness matrix results in the construction of the same biquadratic base of the bipyramid at the both approaches.

On the basis of the got base the borders of the possible deformations of the bipyramid's geometrical form are analysed. It is first well-proven in theory, that FE exists, at using of that as a cell of finite-element mesh, the best accuracy is arrived at the deviation of FE geometrical form from a regular polyhedron, in this case from an octahedron. The critical value of the aspect ratio which provides the achievement of a minimum of trace of stiffness matrix for the bipyramid of the studied geometrical form is found.

A calculable experiment the results of that confirm the theoretical prognosis for properties of bipyramid as FE is conducted. The found regularities allow to suppose the expediency of application of bases with higher-order for FE in form bipyramid.

**Keywords:** finite element method, bipyramid, trace of stiffness matrix, tetrahedral-octahedral mesh.

#### REFERENCES

- Krashanitsa Yu. A., Bahyr A. V., Taranenko V. A., Mashchenko Yu. S. Construction Algorithm of the Three-Dimensional Adapted Mesh for the Tasks of Aerodynamics by Finite Elements Method, *Open Information and Computer Integrated Technologies*, 2014, No. 66, pp. 105–110.
- Greiner G., Grosso R. Hierarchical tetrahedral-octahedral subdivision for volume visualization, *The Visual Computer*, 2000, 1. 16, pp. 357–369.
- de Bruijn H. Numerical Method for 3D Ideal Flow [Electronic resource]. Han de Bruijn Access mode: <http://hdebruijn.soo.dto.tudelft.nl/jaar2010/octaeder.pdf>.
- Motailo A. P. Bases of a 6-knots octahedron [Electronic resource], *Proceedings of the International Scientific-Practical Conference «Future Scientific Researches – 2011»*. Series: *Mathematics Applied Mathematics (2011 February, 17–25)*. Sofia, Bulgaria. Access mode: [http://www.rusnauka.com/Page\\_ru.htm](http://www.rusnauka.com/Page_ru.htm).
- Segerlind L. Application of Finite Elements Method. Moscow, World, 1979, 392 p.
- Shopov P. I. Condensation Method for Mechanics Problems of Compressible Fluids, *Serdica: Bulgarian Mathematical Journal*, 1984, Vol. 10, pp. 198–205.
- Zienkiewicz O. Finite Elements Method in Technique. Moscow, World, 1975, 541 p.
- Sekulovich M. Finite Elements Method. Moscow, Stroyizdat, 1993, 664 p.
- Checking the Skewness ANSYS Icepak 12.1: User's Guide [Electronic resource]. Access data: <http://orange.engr.ucdavis.edu/Documentation12.1/121/ICEPAK/iceug.pdf>
- ANSYS Fluent. [Electronic resource]. Access data: <https://www.sharcnet.ca/Software/Fluent6/html/udf/node1.htm>
- Nesis E. I. Methods of Mathematical Physics. Moscow, Enlightenment, 1977, 199 p.
- Motailo A. P. About the Numerical Solution of Stationary Task of Heat Conductivity by the Finite Element Method on the Mesh with Tetrahedral-Octahedral Structure, *Scientific lists of BelSU. Mathematics. Physics*, 2014, No. 25 (196), I. 37. Belgorod: «NRU BelSU», 2014, pp. 119–127.