ВЛАСТИВОСТІ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ НА ОКТАЕДРІ

А.П. Мотайло
Херсонська державна морська академія
Проспект Ушакова, 20, Херсон, 73000, Украина
E-mail: akilehzna@ukr.net

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. При розв'язанні задач геометричного моделювання полів різної природи методом скінченних елементів (МСЕ) із використанням решіток тетраедрально-октаедральної структури актуальною є задача вибору системи вузлових координатних функцій. Найчастіше перевага надається поліноміальним функціям, які є зручними при їх визначенні та інтегруванні по області скінченного елементу (СЕ).

У роботі [1] розв'язується задача інтерполяції скалярного поля, що є алгебраїчним поліномом другого степеня, по області октаедра. Авторами доведено множинність поліноміальних базисів другого порядку СЕ у формі октаедра з шістьма вузлами інтерполяції, що є гармонічними за Лапласом. У роботі [2] аналізуються локальні характеристики у вигляді сліду матриці жорсткості, визначника та числа обумовленості у нормі L_2 матриці Грама квадратичного та трилінійного базисів, що є окремими випадками поліноміальної інтерполяції другого степеня на СЕ у формі октаедра. На думку автора [3], зменшення сліду матриці жорсткості СЕ покращує його апроксимаційні властивості.

Метою дослідження є визначення поліноміального базису октаедра другого степеня із найкращою локальною характеристикою у вигляді мінімального сліду матриці жорсткості.

МАТЕРІАЛИ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Для октаедра, кожна вершина якого асоційована з вузловою координатною функцією $N_i,\ i=1..6$ [1]:

$$N_{1,3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2\pm\beta_1 xy\pm\beta_2 yz\pm\beta_3 xz;$$

$$N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2\pm\beta_3 xy\pm\beta_1 yz\pm\beta_2 xz;$$

$$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2\pm\beta_2 xy\pm\beta_3 yz\pm\beta_1 xz;$$

де $\beta_1,\beta_2,\beta_3\in R$, слід матриці жорсткості на даному СЕ є функцією коефіцієнтів:

$$Trace=Trace(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\frac{38}{15}+\frac{8}{5}\left(\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\beta_3{}^2\right).$$

Аналогічний результат отримано при обчисленні $Trace(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ для системи поліноміальних базисних функцій СЕ у формі октаедра, побудованих із застосуванням афінних перетворень координат дзеркальної симетрії.

Для октаедра із вузловими координатними функціями [1]:

$$N_{1,3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2+\beta_1 xy+\beta_2 yz+\beta_3 xz;$$
$$N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2-\beta_3 xy-\beta_1 yz+\beta_2 xz;$$
$$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2-\beta_2 xy+\beta_3 yz-\beta_1 xz.$$

де коефіцієнти $\beta_1,\beta_2,\beta_3\in R$ є лінійно залежними, слід матриці жорсткості визначається рівністю:

$$Trace=\frac{38}{15}+\frac{16}{5}\left(\beta_2{}^2+\beta_3{}^2+\beta_2\beta_3\right),\text{ якщо } \beta_1-\beta_2-\beta_3=0.$$

Зокрема, трилінійний базис октаедра відповідає значенням коефіцієнтів $\beta_1=\frac{1}{6}$, $\beta_2=\frac{1}{3}$, $\beta_3=-\frac{1}{6}$.

Очевидно, що слід матриці жорсткості набуває мінімального значення при $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$. Для лінійно залежних коефіцієнтів $\beta_1,\beta_2,\beta_3\in R$ аналогічний результат отримано при побудові вузлових координатних функцій октаедра із застосуванням афінних перетворень координат центральної симетрії. Таким чином, незалежно від системи поліноміальних базисних функцій другого порядку СЕ у формі октаедра $\min(Trace(\beta_1,\beta_2,\beta_3))=\frac{38}{15}$. Отже, найкращим за обраною локальною характеристикою є квадратичний базис октаедра.

ВИСНОВКИ. У роботі досліджено апроксимаційні властивості поліноміальних базисів октаедра другого степеня. У якості прогностичного критерію точності апроксимації обрано мінімальний слід матриці жорсткості. Встановлено, що слід матриці жорсткості набуває мінімального значення для квадратичного базиса СЕ у формі октаедра.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мотайло А.П. Алгебраїчна побудова базиса шестивузлового октаедра [Електронний ресурс] / А.П. Мотайло, А.Н. Хомченко // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2011. – №4. – Вінниця: ВНТУ, 2011. – Режим доступу: http://www.nbuv.gov.ua/e-journals/VNTU/2011_4/2011-4.files/uk/11apmsno_ua.pdf.
2. Мотайло А.П. Порівняльний аналіз базисів октаедра / А.П. Мотайло, А.Н. Хомченко // Матеріали IX Міжнародної науково-практичної конференції "Новітні наукові досягнення - 2013". Серія: Математика (17–25 березня 2013 р.). – Софія. "Бял ГРАД-БГ" ООД, 2013. – Т. 21. Математика. Фізика. Сучасні інформаційні технології – С. 28–33.
3. Секулович М. Метод конечных элементов / М. Секулович. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.