M.M.Bukenov, S.Khabdolda, B.Khabdolda

Iterative method for solving static problems the theory of elasticity in terms of stresses

In this paper we study the asymptotic behavior as $t \to \infty$ dynamic viscoelastic problems constructed based on the use of a viscoelastic Maxwell model. Estimates of the rate of convergence of solutions of a viscoelastic problem to the solution of static elasticity. The study model is used to construct a three-layer iterative method for solving the problem in the static elastic stresses.

References

1 Rabotnov Yu.N. *Elements of Hereditary Solid Mechanics*, Moscow: Nauka, 1977.

2 Konovalov A.N. *On the solution of viscoelastic problems in stresses. Numerical methods for solving problems decisions of tasks in the theory of elasticity and plasticity*: Materials of All-Union Conference, Novosibirsk, 1978, p. 104–109.

3 Konovalov A.N. *Solution of Problems* of *Elasticity Theory* in *Stresses*, Novosibirsk: Publ. NGU, 1979.

4 Fichera G. *Existence theorems in elasticity*, Moscow: Mir, 1974.

5 *Samarskiy A.A. Introduction to the theory of difference schemes*, Moscow: Nauka, 1971.

6 *Samarskiy A.A.*, *Nikolayev* A.S. *Methods for solving the grid equations*, Moscow: Nauka, 1977.

УДК 681.5

А.В.Букетов, Л.В.Кравцова, А.П.Богдан

Херсонская государственная морская академия, Украина
(E-mail: arundo.p@mail.ru)

Определение вероятностей восстановления образцов эпоксидных композитных материалов при повторно-переменных нагружениях

В статье представлены результаты экспериментального исследования полимерных композитных материалов при воздействии повторно-переменных нагружений. На основе экспериментальных данных методом теории случайных процессов установлены вероятности пребывания системы в различных состояниях, а также вероятность разрушения образца при достижении состояния пластической деформации. Разработанная модель позволяет прогнозировать свойства и поведение композитных материалов в процессе эксплуатации.

Ключевые слова: случайные процессы, прогнозирование свойств, вероятности состояний системы.

Постановка проблемы

Полимерные композитные материалы (ПКМ) находят широкое применение в конструкциях разного назначения. Обеспечение экономичности и безопасности эксплуатации конструкций и деталей предъявляет определенные требования к надежности и долговечности используемых материалов [1, 2]. Их высокие удельные механические характеристики особенно необходимы там, где большую роль играет требование снижения массы конструкции. Однако широкое применение ПКМ предполагает также решение ряда научно-технических проблем, связанных с их эксплуатацией. Одно из главных направлений исследований на современном этапе связано с изучением свойств, расширением понимания поведения ПКМ в условиях повторно-переменных нагрузок, с анализом накопленной информации (в том числе и экспериментальных данных), которые позволят сделать достоверные выводы. В частности, интересным с научной точки зрения является испытание образцов ПКМ на чистый изгиб при повторно-переменных нагружениях. Анализ этих испытаний с точки зрения математических методов теории случайных процессов позволит прогнозировать поведение ПКМ в процессе эксплуатации и расширить область применения КМ.

В работе проведены испытания образцов ЭКМ на четырехточечный изгиб при повторно-переменных нагружениях. Нагрузку на образец подавали до определенной величины деформации с шагом 0,05 мм, после чего образец разгружали с тем же шагом деформации. При этом для каждого узлового значения деформации фиксировали изменение нагрузки. Процесс повторно-переменных нагружений повторяли до момента разрушения образца. В результате эксперимента получена зависимость нагрузки на образец от его деформации с учетом цикла.

Анализ последних исследований и публикаций

Известно, что исследование закономерностей процессов деформации и разрушения материалов, находящихся под действием постоянного напряжения, способствует наиболее достоверному прогнозированию деформационных процессов, происходящих в материалах, в том числе и ПКМ [3, 4]. В работах [5–7] авторами проанализированы и исследованы вопросы зависимости абсолютной деформации образца эпоксидного композитного материала от продолжительности воздействия статической нагрузки, предложен метод определения вероятности восстановления образца после снятия статической нагрузки, что, в свою очередь, обеспечит надежность эксплуатации технологического оборудования в различных отраслях промышленности. Данная работа является логическим продолжением исследований.

Цель работы — определение вероятностей пребывания образца эпоксидного композитного материала в различных состояниях при повторно-переменных нагружениях, а также вероятности разрушения образца при достижении им состояния пластической деформации.

Результаты исследования

Случайный процесс, протекающий в какой-либо системе S, называется Марковским (или процессом без последействия), если он обладает следующим свойством: для любого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние.

Классификация Марковских случайных процессов производится в зависимости от непрерывности или дискретности множества значений функции $X(t)$ и параметра t. Различают следующие основные виды Марковских случайных процессов:

– с дискретными состояниями и дискретным временем (*цепь Маркова*);

– с непрерывными состояниями и дискретным временем (*Марковские последовательности*);

– с дискретными состояниями и непрерывным временем (*непрерывная цепь Маркова*);

– с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется непрерывной цепью Маркова при условии, что переход системы из состояния в состояние происходит не в фиксированные, а в случайные моменты времени.

Пусть $S_1, S_2, \ldots S_n$ — всевозможные состояния системы S. Вероятность $p_1(t) = p(S_i(t))$, $i = 1, \ldots n$; $t \geq 0$ события $S_i(t)$, состоящего в том, что система S в момент времени t находится в состоянии S_i, называется вероятностью i-ого состояния системы в момент времени t. Вероятность состояния $p_i(t)$ является, таким образом, вероятностной функцией времени $t \geq 0$.

Так как в любой момент времени t система S будет находиться только в одном из состояний $S_1, S_2, \ldots S_n$, то события $S_i(t)$, $i = 1, \ldots n$ несовместны и образуют полную группу. Поэтому имеет место нормировочное условие: $\sum_{i=0}^{n} p_i(t) = 1, \forall t \geq 0$.

Вероятности состояний $p_1(t), i = 1, \ldots n$ (неизвестные вероятностные функции) являются решением следующей системы дифференциальных уравнений:

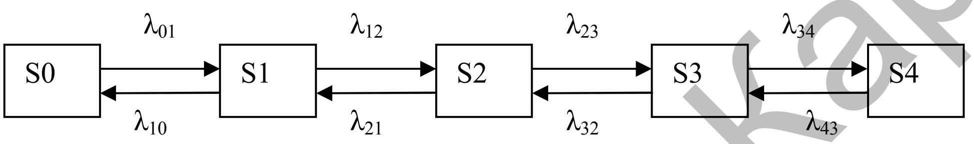
$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\right) p_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} p_j(t), i = 1, \ldots n; t \geq 0.$$

Система представляет собой систему n обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Эта система называется системой дифференциальных уравнений Колмогорова.

В нашем случае составим систему Колмогорова по размеченному графу состояний.

В дифференциальном уравнении Колмогорова для функции $p_1(t),\ i=1,...n,$ левая часть состоит из производной $\dfrac{dp_i(t)}{dt}$ функции $p_i(t),$ а правая часть представляет произведение $\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i(t)$ суммы $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}$ плотностей вероятностей переходов $\lambda_{ij},$ выходящих из состояния S_i, на вероятность $p_i(t)$ этого состояния со знаком минус плюс сумма $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}p_j(t)$ произведений $\lambda_{ij}p_j(t)$ плотностей вероятностей переходов $\lambda_{ij},$ соответствующих стрелкам, входящим в состояние S_i, на вероятности состояний $p_j(t),$ из которых эти стрелки выходят. При этом плотности вероятностей переходов $\lambda_{ij},$ соответствующие отсутствующим стрелкам на графе, равны 0.

Граф состояний имеет вид:



Здесь S_i — состояние системы, соответствующее пограничной деформации образца в момент снятия нагрузки.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова, составленная по графу состояний, имеет вид

$$\begin{cases}\dfrac{dp_1(t)}{dt}=-(\lambda_{10}+\lambda_{12})p_1(t)+\lambda_{01}p_0(t)+\lambda_{21}p_2(t);\\ \dfrac{dp_2(t)}{dt}=-(\lambda_{21}+\lambda_{23})p_2(t)+\lambda_{12}p_1(t)+\lambda_{32}p_3(t);\\ \dfrac{dp_3(t)}{dt}=-(\lambda_{32}+\lambda_{34})p_3(t)+\lambda_{23}p_2(t)+\lambda_{43}p_4(t);\\ \dfrac{dp_4(t)}{dt}=-\lambda_{43}p_4(t)+\lambda_{34}p_3(t).\end{cases}$$

Кроме того, учитываем нормировочное требование $\sum_{i=0}^{n}p_i(t)=1, \forall t\geq 0.$

Вероятности состояний могут быть получены путем решения системы линейных алгебраических уравнений, которые получаются из дифференциальных уравнений Колмогорова, если приравнять производные к нулю, а вероятностные функции состояний $P_1(t),\ldots,P_n(t)$ в правых частях уравнений заменить соответственно на неизвестные финальные вероятности $P_1,\ldots,P_n$.

По результатам измерений получена система линейных уравнений для определения вероятностей состояний $p_0, p_1, ...p_5$ с учетом нормировочного уравнения:

$$\begin{cases}\dfrac{dp_1(t)}{dt}=-82{,}1p_1(t)+46{,}8p_0(t)+31{,}9p_2(t);\\ \dfrac{dp_2(t)}{dt}=-79{,}8p_2(t)+52{,}2p_1(t)+27{,}2p_3(t);\\ \dfrac{dp_3(t)}{dt}=-67{,}8p_3(t)+50{,}8p_2(t)+16{,}4p_4(t);\\ \dfrac{dp_4(t)}{dt}=-17{,}4p_4(t)+40{,}6p_3(t);\\ p_0+p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1.\end{cases}$$

Приравняем к нулю правые части системы:

$$\begin{cases} 46.8p_0 - 82.1p_1 + 31.9p_2 = 0; \\ 52.2p_1 - 79.8p_2 + 27.2p_3 = 0; \\ 50.8p_2 - 67.8p_3 + 16.4p_4 = 0; \\ 40.6p_3 - 17.4p_4 = 0; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1. \end{cases}$$

Систему решаем матричным методом. В матричной форме она имеет вид $A\overline{x} = \overline{b}$, где A — матрица коэффициентов; $\overline{x}$ — вектор-столбец неизвестных; $\overline{b}$ — правая часть.

Тогда если A^{-1} — обратная матрица, такая что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E — единичная матрица, то решение системы имеет вид $\overline{x} = A^{-1} \cdot \overline{b}$.

В нашем случае решением системы будут значения вероятностей состояний системы p_0, p_1, ... p_5.

Матрица коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} 46.8 & -82.1 & 31.9 & 0 & 0 \\ 0 & 52.2 & -79.8 & 27.2 & 0 \\ 0 & 0 & 50.8 & -67.8 & 16.4 \\ 0 & 0 & 0 & 40.6 & -17.4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \overline{x} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0201 & 0.031 & 0.0345 & 0.0357 & 0.055 \\ -0.00173 & 0.015 & 0.0229 & 0.0262 & 0.081 \\ -0.00274 & -0.01 & 0.0083 & 0.01515 & 0.128 \\ -0.00472 & -0.01 & -0.0197 & -0.0058 & 0.221 \\ -0.0110 & -0.03 & -0.0459 & -0.0711 & 0.515 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле $\overline{x} = A^{-1} \cdot \overline{b}$ получим вектор-столбец решения системы

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0549 \\ 0.0811 \\ 0.1283 \\ 0.2207 \\ 0.5150 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вероятность пребывания системы в состоянии S_0 составляет $p_0 = 0,055$, в состоянии S_1 — $p_1 = 0,0811$, в состоянии S_2 — $p_2 = 0,1283$, в состоянии S_3 — $p_3 = 0,2207$, в состоянии S_4, предшествующем разрушению, $p_4 = 0,5150$.

Выводы

Методом теории случайных процессов установлены вероятности пребывания системы в различных состояниях, а также вероятность разрушения образца при достижении состояния пластической деформации. Разработанная модель дает возможность анализировать, прогнозировать свойства, а также оценить поведение композитных материалов под действием повторно-переменной нагрузки, и на основе этих результатов предотвратить преждевременное разрушение.

Список литературы

1 *Кербер М.Л., Виноградов В.М., Головкин Г.С. и др.* Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология: Учеб. пособие / Под ред. А.А. Берлина. — СПб.: Профессия, 2008. — 560 с.; ил.

2 *Аскадский А.А.* Компьютерное материаловедение полимеров. — Т. 1. Атомно-молекулярный уровень. — М.: Научный мир, 1999. — С. 544.

3 *Макаров А.Г., Ростовцева Н.Г.* Моделирование деформационных свойств полимерных материалов // Дизайн. Материалы. Технология. — 2008. — № 1 (4). — С. 140–145.

4 *Букетов А.В.* Ідентифікація і моделювання технологічних об'єктів та систем: Посібник. — Тернопіль: СМП «Тайп», 2009. — 260 с.

5 *Кравцова Л.В.* Определение вероятностей напряженного состояния эпоксидных композитных материалов под воздействием статической нагрузки / Л.В. Кравцова, А.В. Букетов, А.П. Пирог // Искусственный интеллект. — 2013. — № 3 (61). — С. 355–363.

6 *Кравцова Л.В.* Определение вероятностей восстановления и разрушения полимерных композитных материалов под действием статической нагрузки / Л.В. Кравцова, А.П. Пирог, А.В. Букетов // Наукові нотатки. — Луцьк: Изд-во ЛНТУ, 2013. — № 43. — С. 126–133.

7 *Букетов А.В.* Прогнозування деформаційних властивостей епоксидних композитних матеріалів / А.В. Букетов, Л.В. Кравцова, А.П. Пірог // Вісн. Житомирського державного технічного ун-ту. — 2013. — № 4 (67). — С. 7–11.

А.В.Букетов, Л.В.Кравцова, А.П.Богдан

Қайталанған айнымалы жүктеме үшін эпоксидті композитті материалдардың үлгілерін қалпына келтіру ықтималдықтарын анықтау

Мақалада қайталанған айнымалы жүктеменің әсері бар эпоксидті полимерлі композитті материалдардың экперименталды зерттеулердің нәтижелері берілген. Эксперименталды нәтижелер негізінде кездейсоқ процестер теориясының әдісі мен жүйенің әр түрлі күйдегі ықтималдықтары, сондай-ақ пластикалық деформация күйіне жеткендегі үлгінің құлдырау ықтималдылығы орнатылған. Құрылған модель эксплуатация кезіндегі композитті материалдардың өзгеруін және қасиеттерін болжауға мүмкіндік береді.

A.V.Buketov, L.V.Kravtsova, A.P.Bogdan

Determination of probabilities recovery samples of epoxy composite materials under cyclic loading

The paper presents the results of an experimental study of polymer composite materials when exposed to cyclic loading. On the basis of experimental data using the theory of random processes, the probability of the system being installed in different states, as well as the probability of failure of the sample when the state of the plastic deformation. The developed model allows to predict the properties and behavior of composite materials during operation.

References

1 Kerber M.L., Vinogradov V.M., Golovkin G.S. et al. *Polymer composite materials: structure, properties, technology:* Tutorial / Edit. by A.A. Berlin, Saint Petersburg: Professiya, 2008, 560 p.; il.

2 Askadskiy A.A. *Computational materials science of polymers. Atomic and molecular level*, Moscow: Nauchnyiy mir, 1999, p. 544.

3 Makarov A.G., Rostovceva N.G. *Design. Materials. Technology*, 2008, 1 (4), p. 140–145.

4 Buketov A.V. *Identification and modeling of technological objects and systems:* Manual, Ternopil: SMP «Tiap», 2009, 260 p.

5 Kravtsova L.V. *Artificial Intelligence*, 2013, 3 (61), p. 355–363.

6 Kravtsova L.V. *Interuniversity collection «Research notes»*, Luck: LNTU publ., 2013, 43, p. 126–133.

7 Buketov A.V. *Journal of Zhytomyr State Technical University*, 2013, 4 (67), p. 7–11.